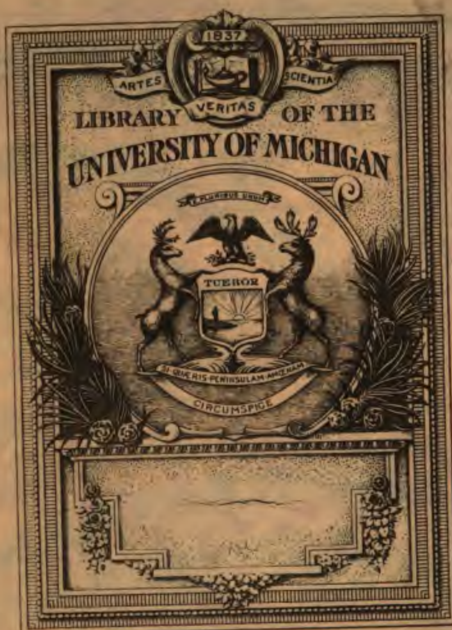

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Quadrat: Cir-
culi

Problema
Deliacum

Pitagore
Inuent.

Eques Ghezi inu. et del.

Phil. Dasconi Sculp.

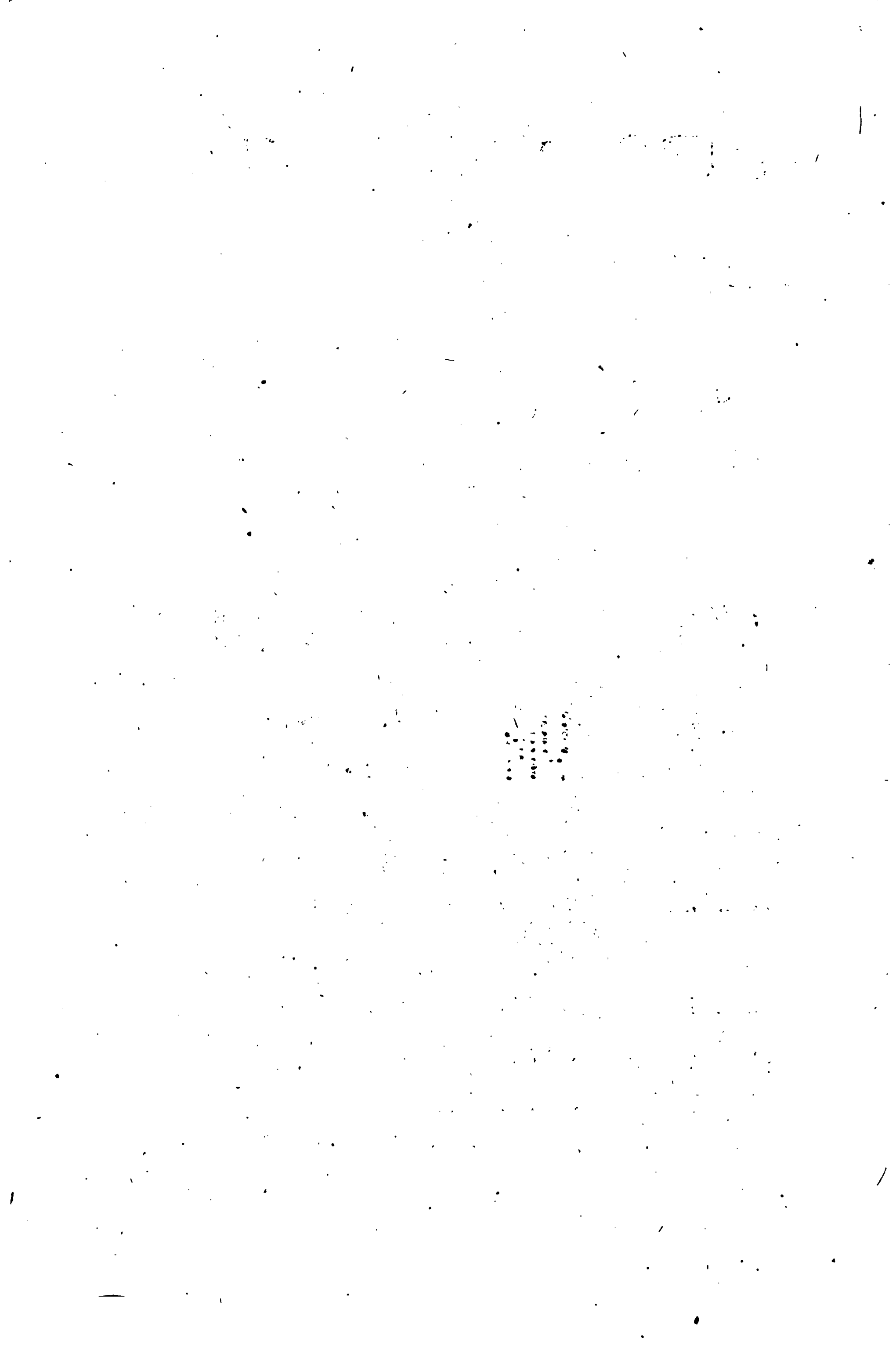
ANDREÆ PIOVANI
CONGREGATIONIS ORATORII
DE URBE
DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ
IN TRISECTIONEM ANGULI PLANI.
QUADRATURAM CIRCULI.
DUPLICATIONEM CUBI,
ET METHODUM DESCRIBENDI IN CIRCULO
Quemcumque Regularem, & imparium Laterum
POLYGONUM.
SERENISS. REGI SARDINIÆ
VICTORIO AMEDEO
DICATÆ.



Abſcondiſti hæc à Sapientibus, & Prudentibus, & revelaſti ea Parvulis. *Matth. xi. 25.*

ROMÆ, M.DCC.XXVIII.

Excudebant Jo: Zempel, & Jo: de Meij propè Montem Jordanum.)(*Superiorum Permiſſu.*



VICTORIO AMEDEO

SFRENISSIMO, AC POTENTISSIMO

SARDINIÆ REGI

FELICITATEM.



ON ſine magna animi, & rationabili formidine, SERENISSIME REX Geometricas haſce demonſtrationes in lucem edo, quas diù in apertum proferre diſtuli veritus, ne quod cæteris, qui Pro-

vinciam hanc cum primis arduam suscepere, mihi quoque contingeret. Duo enim erant fortissima argumenta, quæ mihi negotium facessebant: difficultas nempe horum problematum, quorum solutio non infimæ notæ Geometris meritò visa est impossibilis, vel quod magis, magisque ipsamet experientia exploratum reddidit; etenim usque ad præsens tempus repertus est nemo, qui illa Geometricè absolveret, quamquam non defuerunt Sapientissimi Matheseos Magistri, imo & Inventores, qui ab ipsa Mathesum origine id inutili studio pertentarunt, & ob invi-

ctas

ctas repertas difficultates in desperationem adacti victas dedere manus; & si qui plùs æquo fidentes (forsan ut ego) suas super his problematibus emisere demonstrationes, quia non concludentes inventas, ut priùs ignota remansere, & inter impossibilia recensita: quaproter aliorum, qui longè multùmque anteibant ingenio commotus periculo anceps hæsi, nec parum dubitavi, quin mihi in Geometria levitèr edocto, idem quoque eveniret, & pro laude probrum mercarer, conatumque meum non modo audaciæ alii adscriberent; verùm etiam imputarent temeritati. Hæc ut ingo-

 nue

nuè fatear prima fuit, & potissima ratio, ob quam usque ad hanc diem meas ipsas non evulgavi demonstrationes.

Altera, & fortasse pòtior ratio, quæ me continuit, anceps Patroni fuit electio, cui hoc opus inscriberem. Virum enim cupiebam, & nitebar assequi, qui non modò Majestate, & Potentia me tueretur, verùm etiam doctrina à Zoilorum hujus temporis censuris me vindicaret, qui nihil Sanctum, nihil impollutum dicacitate, & livido ore non carpunt. Quamvis non desint magni nominis Principes, & authoritatis, sub quorum tutela, ac præsidio tutus incederem;

at.

attamen nemo eſt, qui ſcientias omnes, bonarumque artium ſtudia impenſiùs Patrocinio, atque tutela promoveat æquè, ac tu Rex Potentiſſime. Teſtatur hoc recens in tua ditione Accademia à tua Regali munificentia conſtabilita, quæ quaſi fortiſſimum Orthodoxæ Religionis propugnaculum nullos hoſtium veretur inſultus, imò eò magis invicta, quò plùs ab illis bellis impetitur: quod ſummum verò eſt de omnibus tibi curam eſſe profiteris, qui res ad literarias diſciplinas pertinentes tractandas attingunt; quò factum eſt, ut facilè erectus animo licere quoque mihi crede-

diderim hoc opus, tametſi mole parvum, operoſum tamen, nec ut arbitror, prorſus inutile, Majeſtati tuæ dicare: debuerat enim tuo Regio nomine inſigniri, ut ſplendidiùs publicam lucem ſubiret, Invidorumque inſultus deſpiceret, qui proculdubio tanti Nominis reverentia territi, illud ſaltem ſcommatibus impetere ſe cohibebunt.

Affectent alii exoticum nomen, & ſub heroico, vanoque vocabulo interminabiles fabulentur genealogias, ut latenti mendacio honorem ſibi arrogent alienum; ſemper enim nomen vacuum, & inane portabunt, neque veritas erit in

eis,

eis, ſed dumtaxát nominis umbra. Probata, ac pervetuſta Nobilitas longo majorum ordine ad poſteros traducta, quæ perpetuis, ac longè ampliſſimis beneficentiæ argumentis veræ pietati, ac virtuti ſtudet, ea eſt Sereniſſime Rex tuæ gloria Nobilitatis, quæ mirum in modum viventes rapit, latamque ad immortalitatem nominis ſibi viam ſternit, ſolidis undecumque præſtans exemplis. Æmularis profecto illos exercituum Duces majores tuos animi magnitudine perindè, ac geſtis inclytos, quibus immortalem ſibi gloriam compararunt, qua ſola dici poteſt, fuiſſe minores.

At

At propria tibi laus eſt, quod gloria major ſis, non qualicumque, ſed tua. Etenim multos illi vicerunt populos, & domuere victricibus armis; ſed tu non minùs ferro nationes, quàm innata quadam comitate, & benignitate omniũ tibi concilians animos, ita universi te Principe gaudent, & gloriantur, ut nemo tuo paret Imperio, qui ſe non felicem prædicet, quod te Regem ſortitus ſit. Laboravi Sereniſſime Rex, ut Epiſtolam hanc ad modeſtiam Principis, moderationemque ſubmitterem; nec minùs conſideravi, quid aures tuæ pati poſſint, quàm quid virtutibus debeatur. Magna,

&

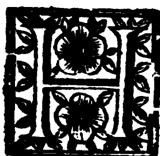
& inusitata Principis gloria, quem si laudavero, non tàm vereor, ne me in laudibus parcum, quàm ne nimium putes. Effusa nihilominùs in alios præconia fræno indigeant: Tibi uni tributæ laudes longè meritis impares videri per te possunt, dummodò tuas per animi dotes non ignoreris. Magna aliorum laus sit, meruisse laudes, Tua est superasse. Erit una longè splendidiùs tanti virtuti decus, & Nomen, si meo item labori Regium Patrocinium, quod enixè efflagito libenter impendas. Dignum siquidem tanto Rege offerre non potui, obtuli tamen, quod habui; idcircò, ut tuus

Regius magis magiſquè ela-
reſcat animus, reſpicere non
tàm opus benignè debes, quám
humillimum Autoris obſe-
quium. Vale.

MAJES. TUÆ

Humillimus, Devinctiſs., & Obſequentiſs. Famulus
Andreas Piovani Cong. Oratorii de Urbe.

AD LECTOREM.



Abes Amice Lector enodata in hoc opuſculo tria problemata tàm difficilia, ut judicio omnium Geometrarum, & Alcebræ ſectatorum, illa geometricè perficere quaſi impoſſibile ſemper judicatum fuit, & quod magis refert (ipsâ experientiâ teſte) ita eſſe compertum eſt; nam uſque ad præſens tempus, nullum illorum geometricè, ſed tantùm mechanicè eſt perſolutum. Miraberis profectò id, quod ab omnibus Matheſum profeſſoribus ſpatio tot ſeculorum reperiri non potuit, à me fuiſſe aſſequutum; ſed talis eſt interdùm mos Dei, ut tribuat immeritis, quod denegat dignis. Confiteor me nunquam Matheſim profeſſum, ſed tantùm animi cauſa illam à me ipſo didiciſſe, atque horis ſuccifivis exercitam circá talia problemata enodanda, dum aliis diſtentus curis, vix aliquam temporis particulam ſubripere potui, ut ad illa vacarem; ideòque ſupervacaneæ ſunt criticæ, quas, ut opinor, Multi adornabunt ad confutandum argumenta à me abducta. At nullam apologiam, nullumque reſponſum expectent: Quod enim gratis exibui ob publicam utilitatem, gra-

tis

tis quoque, & absque ullo dispendio prætereundum: fuerunt etiam magni nominis Autores, & Accademiarum Principes in mathesi, qui in suis demonstrationibus defecére, multò faciliùs deficio forsan, & ego. Sed si mea argumenta convincunt, referas uná mecum gratias omnium bonorum largitori, qui dat cui vult, & cui libet. Asserere tamen audeo, quod etiam si meæ demonstrationes nihil concluderent, certè (omni remotá invidiá) nemo erit, licet summè contentiosus, qui non mirabitur novitatem, facilitatem, & aliquale ingenij acumen; quando autem veré demonstrent, victas dent manus Alcebræ Sectatores; nam si ex Alcebræ principijs arguunt impossibilem anguli plani geometricam trisectionem circino, & regula, cæterorumque horum problematum solutionem, fateantur necesse est (condonent amabò) eorum scientiam fallacem esse, ne dicam falsam; nam falsum non deducitur nisi ex falso. Ad angulum trisecandum adhibuère Pappus, & Archimedes curuas quasdam lineas, quadradricem videlicet, & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur, prout Pappus anguli trisectionem perfecit Lib. 4. pr. 31. ope hyperboles, quod etiam assequi potest, ut fecit Renatus, ope parabolæ, vel etiam ope con-

concoidis; ſed id perficere circino, & regulá, vel judicaverunt impoſſibile, vel inutili Studio tentarunt. Tu ergo benigne Lector, dum vides plures à me vias repertas, & tám triſectum angulum planum ſolo circulo, & recta linea, quàm abſoluta cætera problemata, uſu tantummodò, ut itá dicam, primi libri Elementorum Euclidis, debes mecum tuam exercere benigitatem, compatiendo, ſi quid in hoc opere tibi diſplicere contigerit, quoniam ſolus Deus defectum neſcit. Vale.

NOBILI VIRO PATRITIO AQUILANO
Admodum Reverendo Patri

ANDREÆ PIOVANI

Congregationis Oratorii de Urbe,

EXIMIO, ATQUE UNICO INVENTORI

Geometricæ triſectionis Anguli Plani,

Quadraturæ Circuli,

Et Solutionis deliaci Problematis, ſeu duplicationis Cubi;

Nec non methodi deſcribendi in circulo

Quemcumque regularem, & imparium laterum Polygonum.



ELEGIA

NOn humili ſemper, triſtiſque Elegeja cultu
Afferet imbelles, ut ſolet illa modos.
Grandior Heroo jam nunc accincta Choturno

Magniloquà resonat nostra Talia Chely.
Te canit ingenua decus, o memorabile stirpis
O spes, o patrii gloria rara soli!
Vestina discunt per quem revirescere laudes:
Crescit, & in titulos Gens Amiterna novos.
Et claram à tanto famam lucratus Alumno,
Altior erectis surgit Aternus aquis.
Quem Sophia doctum, celebresque matheseos artes
Excepit tenero Pallas amica sinu.
Quem Pater attonito miratur Tibris ab alveo:
Et septemgemino vertice Roma colit.

Ergo

Ergo age, dum ſupplex ſequitur Te Muſa, ſequentem
Excipe: & in plauſus fac eat illa tuos.
Quamquam o, quid dubias Cœlo committere pennas
Audeat, & ſpatio Te propiore ſequi?
Non homini ſedenim protentis hactenus alis
Ignotum intacto tramite carpis iter.
Namque aliis fruſtrà rerum tentata latentum
Meta, tuis carcer curſibus illa fuit.
Ardua, quæ Reliquis, greſſibus invia noſtris,
Vidimus hac celeri pervia facta gradu.

Quid mihi Consultis Babylon se præferat Astris
Mensaque quid primùm sydera jactet Atlas?
Quidvè suum Megare decantat Achaica Civem?
Grandiùs Oenotrio nascitur Orbe decus.
Multa licet Latiis Tellus inviderit Oris
Attica, majùs adhuc, quod tueatur habet.
Cætera si desint, præsignem hoc Hellada cogent
Italiæ victas spontè dedisse manus.
Nam facili hic tandem, quos Patrum antiquior ætas
Non potuit nodos solvere, solvit ope.

Fama

Fama Syracoſii ſileat portenta Magiſtri,
Qui geminos vitreo clauſit in Orbe polos.
Per quem Phœbeos ſpeculis geminantibus ignes,
Uſta perit Siculis Romula pinus aquis.
Fixaque Trinacrio ſteterat, quæ litore puppis,
Tracta puellari dicitur inde manu.
Nota quidem Priſci ſunt hæc miracula Secli:
Sunt tamen Inventis illa minora tuis.
Scimus, & humanas imitatum murmure voces
Exanimum arguto protulit ore caput.

Ut-

Utque peregrinas Terræ exaudita per oras,
Pellæi insonuit Buccina dicta Ducis.
Ut volet, & certâ sursum pennata feratur
Lege, Tarentino missa Columba sopho.
Scimus, ut Ortigiis olim fabricatus in arvis,
Artifici carcer nomen ab Aure tulit.
Davididæ plures, ut reddidit Umbra figuras:
Memnonis, ut blandùm concinuistis Aves.
Et Smyrnæ referunt speculum, Vultumque Dianæ,
Qui modo substristis, qui modo lætus erat.

Adde

Adde exploratum lynphis Diadema: quod auri
Pondus, & argenti pars quota mixta foret.
Adde; sed, illustrem magis hìc meritura Coronam,
Adde nova ingenii, nunc monimenta tui.
Per te conveniant, ut jam quadrata Rotundis:
Et spatio constent illaque, & illa pari.
Utque Geometræ Planus Tibi scinditur arte
Angulus, in trifidos dum patet ille sinus.
Et modò, si jubeas, parili multangula flexu,
Et latera inter se circulus æqua dabit.

Delia-

Deliacæ, ut ſolvas Cortinæ oracula: Quando
Exhibeas Quadrum per latus omne, duplum.
Facta fidem poſcunt: tantùm quia facta videmus,
Poſſe hominum hæc fieri ſedulitate rear.
Effuſo, ut perhibent, taurorum ſanguine centum
Occubuit Samio Victima cæſa ſeni.
Pythagoræ Inventis plauſit tum Græcia: & aris
Tum bene ſacrificâ dona tulere manu.
Juſtiùs hic caderet centenis hoſtia bobus,
Hoſtia, ſi Veterum more, litanda foret.

Atta-

Attamen antiquo renuas ubi talia ritu
Sanguineis pecundum ferre tributa fibris.
Pro Te Caſtaliæ peragant ſua ſacra Camenæ:
Pro Te Pieridum Carmine Fama litet.
Et ſuperis actura novo pro munere grates,
Ingeminet lituo nobiliore ſonos.
Nec prono tantùm quà labitur Albula fluctu
Ille velit reſidem continuiſſe pedem.
Æthera corripuit victrix: & utrumque recurrat
Phœbeo citiùs lumine, ſolis iter.

Permeat Occiduas, & Eeoas permeat oras:
Arcton, & Austrinas tentet adire domos.
Nec tuus interea desit labor, inclyta palmis
Roma: triumphales instrue, Roma, rotas.
Quos augusta tamen promant Capitolia Currus?
Quæque parent tanto Fercula digna viro?
Detulit Argolicis quidquid Victoribus olim,
Ausoniis quidquid Martis Arena, parum est.
Exortes Olli quamquam reddantur honores,
Nullus honos Olli; præmia nulla satis.

Et

Et vulgata licet toto se gloria jactet
Orbe, minor meritis laudibus Orbis erit.
Nunquam etenim Terræ spatiis claudetur iniqnis:
Nec dubias ævi sentiet illa vices.
Quamlibet innumero decurrant secula motu,
Secula victuram non tamen ulla prement.
Annorum insidias contra, Fatique ruinas
Posteritas laudum fœnore semper alet.

E. C. Q. A. V.

FINIS.

EIDEM AUTORI

Inter Arcades dicto E. M. P. A.

Pro Anguli Trisectione

EPIGRAMMA

PAllade clara olim gemina, nunc clarior ibit,
Andrea, studiis Urbs Amiterna tuis.
Ardua dum versas megarei Inventa Magistri,
Quaque Syracusius tradidit inde senex.
Multa audes, frustra tentata prioribus annis;
Uni debebit qua Tibi Posteritas.
En Monstras, quanam ratione secandus in aquas

Ter-

Tergeminas partes Angulus omnis erit.
Quanta Geometriæ per Te fama addita! famæ
Quin ſpes majoris quanta Geometriæ!
Nam cum præſtiteris, quod numquam preſtitit ullus
Arte tua multò plùs quoquè poſſe probas.

A. F. F. P. A.



PRÆFATIO.

Quid impulerit Autorem ad investigandum Geometricam Anguli Trisectionem Circino, & regula.

NOn me latebat primarios geometras, & Alcebræ Sectatores inter impossibilia recensere geomerticam anguli plani trisectionem, ideòque existimantes, me malè consultum selegisse argumentum, atque etiam temerarium revocare ad legitimam geometriam, quod ab omnibus hactenùs destitutum, nè dixerim desperatum habetur. Ait enim Cartesius in suis operibus geometricis. Quadraturam Circuli non adhùc inventam, fortasè ab aliquo inveniri posse, sed Cui voluerit Filius revelare: At Angulum planum circino, & regula trisecare esse omninò impossibile. Clavius quoque inter Geometras, & ipse clarissimus *l.8.* Geometriæ practicæ ad *prop.* 25. agens de Anguli trisectione inquit: *Problema hoc*

Ve-

Veteres diù multùmque exagitavit, nec ab ullo ad hanc usquè diem geometricè solutum est. Idem quoque fatetur *P. Taquet Societatis Jesu ad Schol. pr. 9. l. 1.* Elementorum Euclidis, aliique: Nihilominùs dum firmiter semper tenui id quod Archimedes omnium geometrarum facilè Princeps dixit initio libelli de spiralibus Dositheo, videlicèt: *Quot in geometria visa sunt primùm impossibilia, quæ tempore suam capiunt perfectionem?* Inherens dicto non solùm tanti Viri, sed etiam notitiæ à me habitæ, quod aliqui anguli plani geometricè trisecantur (proùt in fine ostendam) judicavi me magis debere obsequentem esse veritati, quam ab opinione Autorum deterreri, præcipuè illorum, qui admittunt de facto trisecari geometricè aliquos planos angulos, sed negant omnium trisectionem, quàm dicunt esse impossibilem. Sed quis non irrideret hominem ità argumentantem. Est possibilis geometrica trisectio aliquorum angulorum, ergo geometrica trisectio omnium est impossibilis; dùm

potiùs inferri debet. Ergo geometrica trisectio omnium est possibilis. Illi igitur, qui admittunt omnes angulos planos trifariam dividi non posse, dicant potiùs nullum angulum planum trisecari posse, quàm malè deducant ex possibili trisectione aliquorum, cæterorum impossibilitatem; dum ad eorum convincendam falsam assertionem, ipsæ demonstrationes ostendunt, quàm facile sit, quemlibet angulum planum geometricè trisecare; quo impleto, ille Pappi reatus evanescit, quem legimus in fine lib. collectionum quarti his verbis: *Videtur quodammodò peccatum non parvum esse apud Geometras, cum Problema planum per conica, vel linearia ab aliquo invenitur, & ut summatìm dicam, cum ex improprio solvitur genere.*

Si igitur revocaverimus trisectionem anguli plani ad suum peculiare genus, & non tantùm tripartito, sed in qualibet analogia per numerum imparem geometricè secari posse ostenderimus, absolutos quoque à tali piaculo nos

esse

esse credemus. Interim hoc animadvertisse non parum confert ad disponendum animos contradicentium, ut faciliùs captivent intellectum in obsequium veritatis; nam remota illorum determinatione in partem oppositam, ut magìs proni ad veritatem amplectendam, nullo labore obsequentur demonstrationum imperio, & ignotam hactenùs veritatem velint, nolint Assertores impossibilium fatebuntur.



I M-

IMPRIMATUR.

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

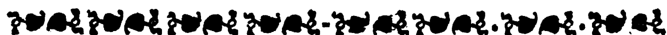
N. Episcopus Bojan. Vicesgerens.



APPROBATIO.

GEometricas Demonstrationes ab Adm. Rev. Patre Andrea Piovani Congregationis Oratorii Urbis Romæ novissimè excogitatas, quas perlegi demandante Rev. Patre Magistro Sacri Palatii Apostolici, reperi magnitudine ingenii, eximia sapientia, atque eruditione; nec non calamo adeò felici explanatas, ut ab unoquoque hominum inoffenso pede, ac facili negotio decurri possint. Quamobrem Typis mandandas censeo, ut quæ jamdiù, multumque expectatæ fuerunt, in lucem tandem proferantur.

Nicolaus de Simone.



IMPRIMATUR.

Fr. Gregorius Selleri Sacri Apostolici Palatii Magister, Ordinis Prædicatorum.

DE



DE PRÆSTANTISSIMA, AC NOBILISSIMA REGULA

Triſecandi circino, & regula quemcumque Angulum planum.

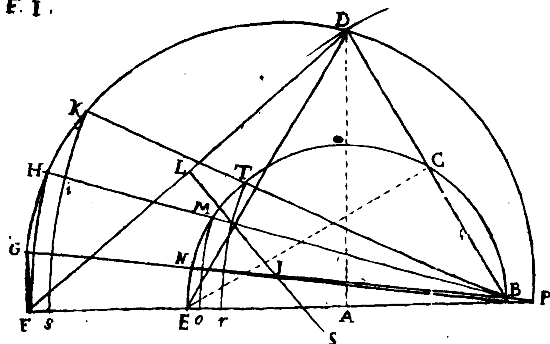
PROPOSITIO PRIMA.

SI ſupra diametrum Semicirculi fiat Triangulum aequilaterum, latera ad ipſius extrema conjuncta dividuntur bifariam ab arcu ſemicirculi: & ſi diameter ab una parte protrahatur indefinitè, & in-

intervallo Semidiametri abſcindatur æqualis, ducaturque ab extremo abſciſſæ ad extremum oppoſiti lateris recta linea, quæ dividatur bifariam à perpendiculari, & in dicta perpendiculari capiatur punctum aliquod ad libitum cadens intra triangulum à dicta recta linea conſtitutum, atq; intervallo á dicto punto ad extremum abſciſſæ ducatur arcus verſus oppoſitum latus trianguli. Omnes rectæ lineæ ductæ uſq; ad dictum arcum ab angulo Trianguli æquilateri illi oppoſito, habebunt partes à dictis arcubus interceptas majores abſciſſa à producta diametro.

DU-

Figura Prima.



DUcatur recta B E. indefinitè, & intervallo ad libitum, ut A B. facto centro in aliquo puncto A. ducatur semicirculus B C E., & eodem retento intervallo abscindatur à protracta diametro æqualis E F. . Deindè fiat triangulum æquilaterum B D E. , & ab angulo E. ad intersecationem C. ducatur recta E C., denique jungatur F D., & dividatur bifariam perpendiculari L S., & in dicta perpendiculari capiatur ad libitum punctum aliquod cadens intra triangulum F D B., ut ad punctum I., & à dicto puncto I. intervallo I F. ducatur versus latus oppositum B D. arcus F D P. jungaturque D A.

Quia duo triangula F L I. D L I. habent la-

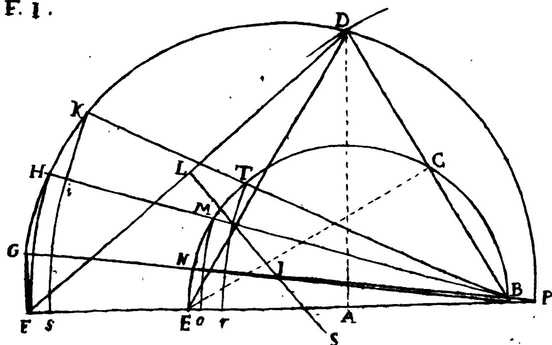
latera FL. DL. ex conſtr. æqualia, latus LI. commune, & angulos à dictis lateribus contentos æquales, ideſt rectos, (*Ex* 4.*l.* 1.) habent etiam baſes IF. ID. inter ſe æquales, ideòque arcus FDP. tranſiens per punctum F[*Per def.* 15.]tranſire quoque debet per punctum D. Recta BE. dupla eſt rectæ AE., & quoniam FE. facta eſt æqualis EA. [*Ex ax.* 6.] etiam recta FA. dupla eſt EA., ac propterea FA. eſt æqualis BE., & cuilibet lateri trianguli æquilateri BDE.. In dicto triangulo æquilatero recta DA. dividens biſariam baſim BE. [*Per* 3.*l.*3.] dividit ad angulos rectos, & idcircò in triangulo DAE. [*Ex* 19.*l.* 1.] Angulus rectus A. ſubtenditur à majore latere DE.. Dum igitur DE. major eſt DA., etiam recta FA. oſtenſa æqualis DE. major eſt DA., & per conſequens perpendicularis LS. neceſſarió ſecare debet rectam FA., nec tranſire poteſt per punctum A., aliter pars, & totum eſſent æqualia, quod eſt abſurdum.

Inſuper in eodem triangulo æquilatero BDE. recta EC. dividens ad angulos rectos latus BD. [*Per* 3.*l.*3.]dividit biſariam, nam angulus in ſemicirculo [*Ex* 31.*l.*3.] eſt rectus, ſed recta EC. cadit ſupra punctum C. interſecationis, quam facit arcus ſemicircu-

li

li cum latere BD.. Ergo arcus ſemicirculi dividit illud bifariam ; Idemque eſt de altero latere E D., quod erat probandum.

Figura Prima.



Recta A F. oſtenſa eſt æqualis DB., & eſt etiam diviſa bifariam ad punctum E. ergo duæ rectæ C D. E F. ſunt interſe æquales ; hoc eſt duæ rectæ terminantes duos arcus E T C. F H D.. Per centrum I. ducatur recta, P G.,& jungantur F G. G B. ; dico quod linea B G. ducta ab angulo B. uſque ad majorem arcum F H D. habet partem N G. interceptam à duobus arcubus ETC. F H D. majorem abſciſſa E F , & altero arcuum extremo C D. ; & quod dicitur de recta B C. eſt etiam verum de omnibus aliis rectis lineis ductis ab eodem angulo B. uſque

usque ad dictum arcum majorem; videlicet ut omnes habeant partes à dictis arcubus interceptas majores abscissa EF. , & altero arcuum extremo CD., quod ita probatur.

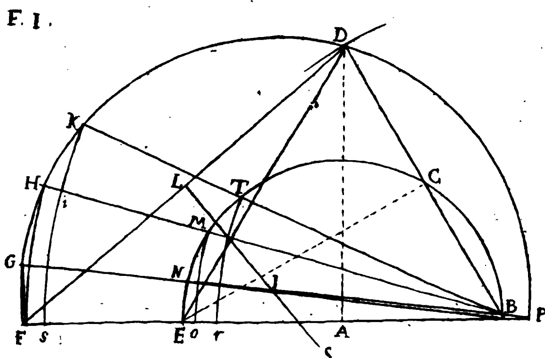
Quia Triangulum PFG. [*Ex* 31.*l*.3.] habet angulum F. in semicirculo rectum, in triangulo BFG. latus BG. subtendens angulum rectum F. [*Per* 18.*l*.3] majus est latere BF., sed BE. diameter semicirculi BCE. [*Ex* 15.*l*.3.] major est BN., quæ intra eumdem semicirculum cadit. Ergo si à majori latere BG. auferatur pars minor BN. & à minori latere BF. auferatur major BE., [*Per ax*.5.] reliquum NG. majus erit reliquo EF., & consequenter etiam majus altero extremo CD., quod est propositum.

Capiatur nunc intervallum BF., & centro B. ducatur arcus versùs punctum G., qui necessario secabit rectam BG. ostensam majorem BF., & ultra dictam lineam secabit etiam ad aliquod qunctum H. majorem arcum FHD.; quoniam latus BF. majus est ex constr. latere BD. terminante dictum arcum, & jungatur HB.

Quia duæ rectæ BF. BH. ut Semidiametri ejusdem circuli sunt inter se æquales, [*Per def*.15.] sequitur, quod si ab æqualibus

bus inæqualia demas [*Ex ax.5.*] ea, quæ remane..t sint ieæqualia, sed B E. diameter semicirculi BCE. [*Per 15. l.3.*]major est BM. cadente intra eumdem semicirculum BCE. ergo si à BF auferatur major BE., & à BH. auferatur minor BM., pars, quæ remanet MH. major est remanente EF., hoc est intercepta MH. major est abscissa EF., & altero extremo CD. quod volebamus.

Figura Prima.



De omnibus aliis rectis lineis ductis à quocumque. puncto arcus FH ad angulum B, est eadem demonstratio, quia cum omnes sint inter se æquales, & habeant partes cadentes intra minorem semicirculum BCE. minores diametro BE., partes quæ remanent interceptæ à duobus arcubus erunt omnes

majores abſciſſa E F., & altero extremo C D. ex eodem axiomate s., ideòque multò ſunt majores interceptæ à dictis arcubus, ſi lineæ ducantur à quolibet puncto majoris arcus FGH. uſque ad dictum angulum B., ut patet.

Inſuper à diametro B E. abſcindatur minor BM. arcu Mo., & quoniam o F. major eſt E F., capto intervallo E F., centro o. abſcindatur æqualis os., & iterùm capto intervallo B s., centro B. ducatur arcus verſus H., & quoniam B H. oſtenſa eſt æqualis B F. cum B s. minor ſit B F. erit quoque minor B H., ideòque arcus ductus intervallo minore B s. ſecabit B H. ad aliquod punctum i. & ultra dictam lineam ſecabit etiam ob rationem datam, arcum majorem FHD. ad aliquod punctum K., à quo ad angulumB. ducatur recta K B..

Quoniam arcus K s. major eſt arcu i s. (totum enim, & pars) angulus K B s. ad centrum B. inſiſtens arcui K s. [*Ex contr.26. l.3.*] major eſt angulo i B s. ad idem centrum, inſiſtente arcui i s., ergo recta BT. in ſemicirculo minore, ut magis remota à centro A., quàm recta B M. [*Per 15.l.3.*] minor eſt B M., hoc eſt minor B o. æquali B M., ſed duæ B s. B K.; ut ſemidiametri ejuſdem

cir-

Figura Prima.

F. I.

circuli sunt inter se æquales, ergo si à dictis æqualibus inæqualia BT. Bo. demas [*Ex ax.* 5.] quæ remanent TK. os. sunt inæqualia, & quia à recta BK. dempta est minor BT., erit intercepta TK. major abscissa EF. cui os. facta est æqualis, & per consequens etiam major altero extremo CD.: de omnibus rectis lineis ductis à quolibet puncto arcus iK. ad angulum B. eadem demonstratione ostenditur, quod habeant partes interceptas à duobus arcubus MT. iK. majores os. hoc est abscissa EF., ob rationem jàm supra assignatam.

Si vis probare etiam alias rectas lineas habere partes interceptas à duobus arcubus majores extremis, cape iterum interval-

lum BT., & centro B. duc arcum Tr., & fac quæ priùs ſunt facta, & ſic ſemper incedendo, atque argumentando oſtenditur, omnes alias rectas lineas ductas à quocumque puncto arcus KD. uſque ad angulum B, habere partes interceptas à duobus arcubus KD. TC. majores extremis EF. CD. Si igitur ſupra diametrum ſemicirculi &c. quod faciendum, & demonſtrandum erat.

Converſa hujus propoſitionis eſt. Si ſupra diametrum ſemicirculi &c., & ab angulo FBD. ducatur recta indefinitè, atque ab interſecatione, quam indefinita facit cum arcu ſemicirculi, abſcindatur pars major abſciſſa EF., & per puncta extrema rectarum cadentium extra ſemicirculum tranſeat arcus. Omnes rectæ lineæ ductæ à prædicto angulo B. ad arcum majorem, habebunt partes interceptas à duobus arcubus majores abſciſſa EF. à producta diametro. Ratio hujus converſæ propoſitionis eſt clara, nam ſi ducatur ab angulo B. recta BH. indefinitè, & ab interſecationis puncto M., quam facit BH. cum arcu ſemicirculi, abſcindatur MH. major abſciſſa EF., & altero extremo CD. (prout jàm eſt demonſtrata major), & per puncta extrema F. H. D. [*Ex 25.l.3.*] tranſeat arcus FHD. dictus

arcus

arcus habebit idem centrum I. intra triangulum BDF., & per consequens demonstrationes sunt eædem.

COROLLARIUM.

Ex demonstratis sequitur, quod in omnibus schematibus simili modo constructis, si una recta linea ducta ab angulo B. ad arcum majorem, habeat partem interceptam sive majorem, sive minorem sive æqualem extremis. Omnes aliæ rectæ lineæ ductæ ab eodem angulo ad dictum majorem arcum, habebunt partes interceptas, aut majores, aut minores, aut æquales extremis, & hoc ex eo, quod arcus intercipientes sunt curvæ lineæ regulares terminatæ ab æqualibus lineis rectis, ductis ab eodem puncto B.; prout meliùs dignoscetur ex sequentibus propositiouibus.



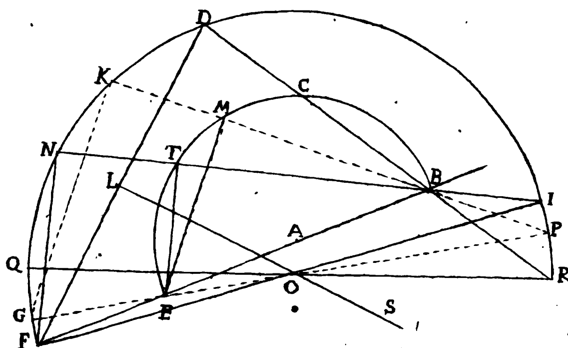
PROPOSITIO II.

SI ſupra diametrum ſemicirculi &c., & ab extremo abſciſſæ ad extremum oppoſiti lateris ducatur recta linea, quæ dividatur biſariam à linea perpendiculari, in qua capiattur punctum aliquod ad libitum cadens extra triangulum à dicta recta linea conſtitutum, atque intervallo à dicto puncto ad extremum abſciſſæ, ducatur verſùs latus oppoſitum circulus. Omnes rectæ lineæ ductæ vſq; ad dictum arcum ab angulo trianguli æquilateri illi oppoſito, habent partes interce-

ptas

ptas à dictis duobus arcubus minores abſciſſa à producta diamatro.

Figura Secunda.



Fiat figura priori ſimilis, ſed latus D B. trianguli æquilateri protrahatur indefinitè, & in perpendiculari L S. capiatur centrum O. extra triangulum B D F., deindé intervallo O F., vel O D. ducatur verſus D. arcus FD., qui protrahatur donec ſecet latus DB. productum ad aliquod punctum R., & á dicto puncto R. per centrum O. ducatur recta R Q., & á puncto F. per centrum O. ducatur recta F I., atque

à puncto I. per punctum B. ducatur recta IN., & jungantur NF. TE. Quoniam in hac figura centrum majoris circuli captum est extra triangulum BDF., dico quod omnes rectæ lineæ ductæ ab angulo B. usque ad majorem arcum FND. habent partes interceptas à duobus arcubus minores extremis EF. CD., quod ita demonstro.

Quoniam extremum F. rectæ FI. secantis rectam QR. ad centrum O. est sub extremo Q. rectæ QR., sequitur, quod extremum oppositum I. rectæ FI. sit supra extremum oppositum R. rectæ QR., & similiter, quia extremum I. rectæ IN. secantis ad angnlum B. rectas DR., & FB. productam supra centrum O., est inter exrremum R.; & extremum productæ FB., sequitur, quod extremum oppositum N. rectæ IN. sit inter extrema opposita D. F. earumdem, ideòque pars BN. cadit intra angulum DBF.. In triangulo INF. Angulus N. (*Ex* 31.*l*.3.) in semicirculo est rectus, & similitèr rectus est angulus T. in semicirculo ETB, duæ igitur rectæ TE. NF. (*Per* 28.*l*. 1.) sunt inter se paralellæ, & idcircò in triangulo BNF. (*Ex* 2. *l*.6.) erit, ut BE. ad EF., ita BT. ad TN., & permutando, ut BE. ad BT., ita FE ad NT., sed BE. subtendens angu-

lum

Figura Secunda.

F. II.

lum rectum (*Per* 18. *l.* 1.) major est BT., ergo FE. major est TN.. Est igitur intercepta TN. minor abscissa EF., quod est propositum. Pro omnibus aliis rectis lineis interceptis à duobus arcubus ET. FN., & ductis ab angulo B., quod habeant partes interceptas à duobus arcubus supradictis, minores extremis EF. CD., eadem demonstratione ostenditur, quod sufficeret ad demonstrandum omnes rectas lineas ductas ab angulo B. habere partes interceptas à duobus arcubus ETC. FND. minores extremis EF. CD., & hoc propter rationem superiùs assignatam, quod

arcus peripheriarum ſunt curvæ lineæ regulares.

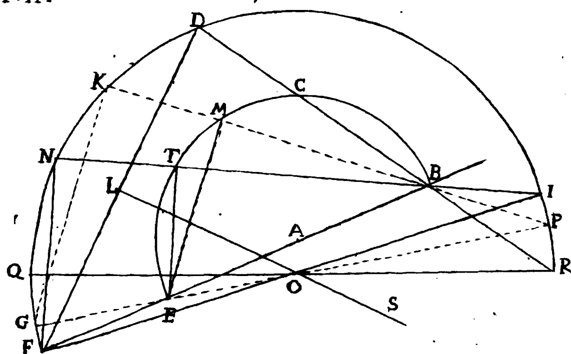
Nihilominùs pro majore certitudine aſſertæ propoſitionis ducatur à puncto E. per centrum O. recta GP., & à puncto P. per punctum B. ducatur recta PK., cujus pars BK. ob rationem nuper datam cadit intra angulum DBF., & jungantur KG. ME.

Quia in triangulo GKP angulus K. (*Ex* 31. *l.* 3.) in ſemicirculo eſt rectus, & pariter rectus eſt angulus M. in ſemicirculo BME., duæ ME. KG. (*Per* 28. *l.* 1.) ſunt inter ſe paralellæ; & id circò (*Ex* 2. *l.* 6.) erit, ut PE. ad EG., ita PM. ad MK., & alternando, ut PE. ad PM., ita EG. ad KM., ſed PE. (*Per* 18. *l.* 1.) ſubtendens angulum rectum, major eſt PM., ergo, & EG. major eſt MK., ſed FE. major eſt GE, quia in triangulo FEO. duo latera FE. EO. (*Ex* 20. *l.* 1.) majora ſunt tertio FO., & per conſequens etiam majora recta OG., Nam rectæ OG. OF., ut ſemidiametri ejuſdem circuli ſunt inter ſe æquales; ablato igitur à duobus lateribus OE. FE., & à recta OG. communi OE., latus FE. (*Per ax.* 5.) majus erit reliqua EG. Ideòque ſi intercepta MK.

minor

Figura Secunda.

F. II.



minor est E G., erit multò minor extremo E F., quod voluimus. Demonstro iterùm rectas lineas ductas ab angulo B. ad quodlibet punctum arcus N D., habere partes interceptas à duobus arcubus minores extrmis E F. C D.

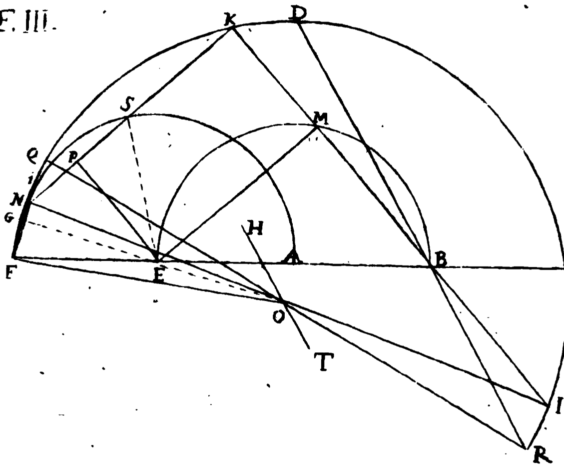
Fiat similis figura, & æqualis antecedenti, & quoniam recta F E. ostensa est major recta E G., capiatur intervallum E F. & centro E. ducatur semicirculus F S A., & à puncto N. majoris arcus, quod cadit intra aream minoris circuli, ducatur per centrum O. recta N I. secans rectam Q R. ad centrum O., & à puncto I. per punctum

ctum B. ducatur recta IK., & à puncto N. ducatur recta NK., denique à puncto E. ducatur EP perpendicularis ad NK., & jungantur ME. ES.

Quoniam recta EF. ostensa est major EG., arcus semicirculi FSA. transire debet supra extremum G. rectæ EG., & idcircò arcus semicirculi FSA. secans arcum majorem ad puncta F. i. cadit extra majorem arcum; ideòque punctum N. captum in arcu majore, cum sit intra aream minoris circuli, recta NK. ducta à dicto puncto N. ad punctum K. positum extra minorem circulum, necessariò secare debet arcum dicti minoris circuli ad aliquod punctum S., ut est manifestum. In Triangulo NKI. angulus K. in semicirculo (*Ex* 31. *l*.3.) est rectus, & pariter rectus ob eamdem rationem angulus M., & propterea duæ ME. KN. (*Per* 28. *l*. 1.) sunt inter se paralellæ, & quia EP. ducta est perpendicularis ad NK., sequitur quod duæ MK. EP. per eamdem 28. *l*. 1. sint etiam inter se paralellæ, & quadrilaterum EK. sit paralellogrammum rectangulum, ideòque latera opposita MK. EP. sunt inter se æqualia, sed EP. cadens intra aream semicirculi minoris minor est EF. semidiametro ejusdem circuli, ergo, & MK.

erit

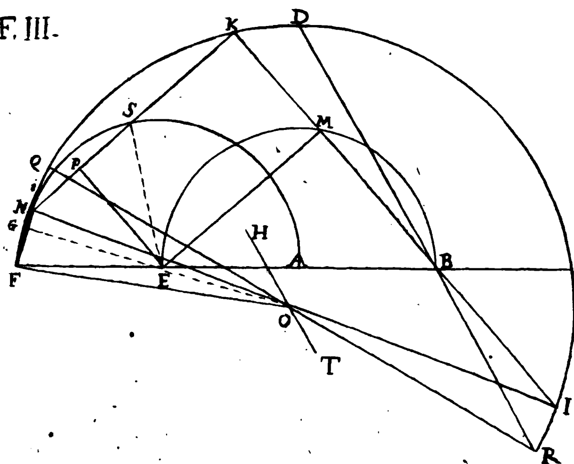
Figura Tertia.



erit quoque minor EF., sed MK. est pars intercepta à duobus arcubus lineæ BK., & EF. est abscissa à protracta diametro, ergo intercepta MK. minor est abscissa EF., & altero extremo CD. quod est propositum. De omnibus aliis rectis lineis ductis ab aliis punctis captis in parte secta Fi. circumferentiæ majoris circuli per centrum O., probatur eadem demonstratione, quod habeant partes interceptas à duobus arcubus minores extemis, dummodò fiant omnia, quæ facta sunt in præsen-

ſenti demonſtratione. Si igitur ſupra diametrum ſemicirculi &c., quod faciendum, ac demonſtrandum erat.

Figura Tertia.



Si quis animo contradicendi dicere vellet, quod perpendicularis E P. non cadit ad punctum P., ſed ad aliud punctum; dicat ad quod punctum cadit. Si ad punctum aliud rectæ N S. ſecantis arcum minoris circuli, ſemper, ut cadens intra aream ſemicirculi erit minor ſemidiametro E F. ejuſdem circuli; Si cadit ad punctum S. interſecationis, quam facit N K. cum arcu ſemicirculi, Contra: nam in triangu-

lo

lo E S P. quia angulus S. rectus eſſet ob perpendicularem E S.; ſubtenderetur per 19, *l.* 1. à majore latere E P. cadente intra aream ſemicirculi, ideòque pars eſſet major toto, quod eſt abſurdum. Si caderet perpendicularis extra arcum ſemicirculi, multò magis probaretur idem abſurdum; Dum igitur non poteſt cadere neq; ad interſecationem, quam facit recta N K. cum arcu ſemicirculi, neque extra ſemicirculum, neceſſariò cadit intra aream dicti ſemicirculi, & per conſequens dicta perpendicularis minor eſt ſemidiametro E F. ejuſdem circuli, quod volebamus.

Converſa hujus propoſitionis eſt omninò eadem cum converſa primæ propoſitionis, ſervata ſolùm differentia, quod à recta linea ducta indefinitè ab angulo B. abſciendenda eſt ab interſecatione, quam facit cum arcu ſemicirculi pars minor abſciſſa E F. à protracta diametro; nam rationes ſunt eædem, quæ allatæ ſunt in converſa primæ propoſitionis.



PRO-

PROPOSITIO III.

SI ſupra diametrum ſemicirculi &c., & ab extremo abſciſſe ad extremum oppoſiti lateris ducatur recta linea, quæ dividatur bifariam á linea perpendiculari, & in ea capiatur punctum interſecationis, quam ipſa facit cum baſi trianguli ab ea conſtituti, atque intervallo à dicto interſecationis puncto ad extremum abſciſſæ ducatur verſus latus oppoſitum arcus; Omnes rectæ lineæ ductæ ab angulo trianguli æquilateri illi oppoſito, uſque ad majorem arcum, habent partes interceptas à

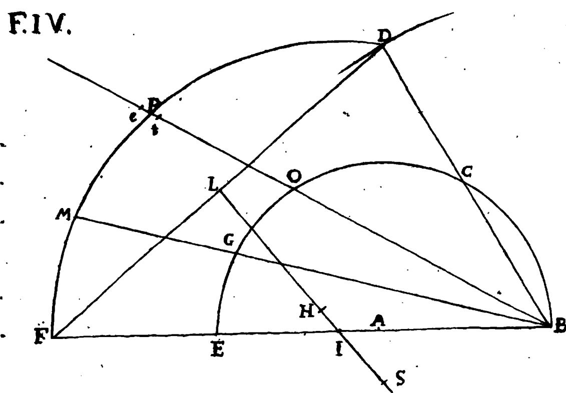
duo-

duobus arcubus æquales abscissæ á producta diametro.

Construatur figura eodem modo, quo constructæ sunt priores, & ab angulo B. ducatur recta linea BM. indefinitè, & ab intersecatione, quam facit cum arcu semicirculi abscindatur GM. æqualis abscissæ EF. & [*Ex 25.l.3.*] per tria puncta F.M.D. ducatur arcus, qui cum non possit habere centrum nisi in puncto I. intersecationis, dico, quod omnes rectæ lineæ ductæ ab angulo B. usque ad majorem arcum FMD., habent partes interceptas à duobus arcubus æquales extremis EF. CD.

Si arcus transiens per tria puncta F.M.D. non habet centrum in intersecatione I., habebit dictum centrum, vel intra triangulum BDE., ut ad aliquod punctum H. perpendicularis LS., vel extra dictum triangulum ad aliquod punctum S., nam unum ex his tribus necesse est esse. Si habet centrum ad punctum H. intra triangulum, ergo intercepta, uti jam demonstratum est in prima propositione, major est extremis EF. CD., quod est contra hypotesim, & absurdum, quoniam GM. facta est æqualis ex-

Figura Quarta.



tremis. Si verò centrum dicti arcus cadit extra triangulum, ut ad punctum S., vel aliud quodcumque ſit. Ergò GM. intercepta à duobus arcubus, ex ſecunda etiam demonſtrata propoſitione, erit minor EF. CD., quod pariter eſt contra hypoteſim, & abſurdum, quia GM. ex conſtr. capta eſt æqualis extremis. Dum igitur arcus FMD. non poteſt habere centrum neque intra, neque extra triangulum DBF., neceſſariò erit ipſius centrum in interſecatione I., quod voluimus.

Demonſtro nunc omnes alias rectas lineas ductas ab angulo B. uſque ad majorem arcum FMD. habere partes intercep-

ptas

ptas à duobus arcubus æquales extremis E F. C D.

Ab angulo B. ducatur recta B P. indefinitè, vel alia ad libitum, erit intercepta à duobus arcubus pars O P., quæ si non est æqualis extremis, ut est intercepta G M., erit aut major, aut minor. Si est minor augeatur donec sit ægualis extremis, & sit augumentum P e., vel aliud. Quoniam arcus transiens per tria puncta F. e. D. non potest congruere cum arcu F P. D., debet necessario habere aliud centrum; & quia arcus F e D., ut magis inflexus habet semidiametrum minorem semidiametro arcus F P. D. cadere debet intra triangulum B D F. ad aliquod punctum perpendicularis L S. sed jam (*Per pr.* 1.), demonstratum est, quod omnes rectæ lineæ ductæ ab angulo B. usque ad arcum habentem centrum intra dictum triangulum, habent partes interceptas à duobus arcubus majores extremis. Ergo recta B e. cum sit una ex illis, habet partem O e. interceptam majorem extremis E F. C D., quod est contra hypotesim, & absurdum.

Si verò intercepta O P. est major extremis E F. C D. reducatur ad eorum æqualitatem per abscissionem partis P t., vel

 alte-

alterius partis. Similiter arcus transiens per tria puncta F. t. D. non potest congruere cum arcu FPD.; sed debet habere aliud centrum; & quoniam semidiameter arcus F t D., ut minùs inflexi, major est semidiametro arcus F P D., habet centrum extra triangulum B D F. ad aliquod punctum perpendicularis L S.: Sed jam probatum est in secunda propositione, quod omnes rectæ lineæ ductæ ab angulo B. usque ad arcum habentem centrum extra triangulum B D F., habent partes interceptas à duobus arcubus, minores extremis; Et quia recta B i. est talis, habebit interceptam partem O t. minorem extremis E F. C D. quod est contra hypotesim, & absurdum. Est igitur evidens, quod intercepta O P. cum non possit neque augeri, neque minui, ut æquetur extremis, sit ipsis extremis æqualis. Si igitur supra diametrum semicirculi &c. quod faciendum, ac demonstrandum erat.

Argumenta abducta pro æqualitate interceptæ O P. valent etiam ad demonstrandum, quod omnes aliæ rectæ lineæ ductæ ab angulo B. usque ad arcum F M D. habentem centrum in intersecatione I.; habent partes interceptas à duobus arcubus ipsis extre-

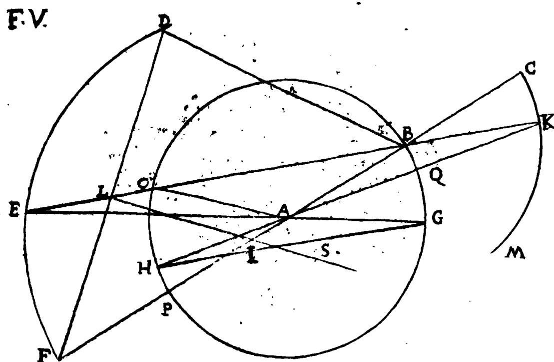
extremis æquales. Et ex demonstratis propositionibus apertè cognoscitur, quod in earum figuris, si una intercepta est major, vel minor, aut æqualis extremis, omnes aliæ sunt tales propter rationem superiùs assignatam; videlicet, quod arcus circulorum sunt curvæ lineæ regulares. &c.



PROBL. I. PROPOS. IV.

DAto quocumque angulo acuto, Illum in tres partes, vel Angulos inter se æquales dividere.

Figura Quinta.



SIt datus acutus angulus dividendus in tres partes æquales BAG. Protrhatur recta BA. hìnc indè indefinitè, & capto ad libitum interuallo, facto centro in dato angulo A. ducatur circulus BOP. Deindè reten-

tento eodem intervallo, abſcindatur æqualis P F., & facto centro in puncto B. eodem intervallo ducatur arcus C M. Poſtea capto intervallo diametri B P. fiat triangulum æquilaterum P B D; & ducta recta D F. dividatur bifariam perpendiculari L S., & facto centro in interſecatione I. intervallo I F., vel I D. ducatur arcus D E F., & protrahatur recta G A. uſque ad aliquod punctum E. arcus prædicti, atque à puncto E. per punctum B. ducatur recta E B., & protrahatur uſque ad arcum C M., quæ illum ſecabit ad aliquod punctum K., denique à puncto K., per centrum A. ducatur K A. uſque ad circumferentiam circuli, quæ illum ſecabit ad aliquod punctum H., & jungantur H G. A O.

Quia triangulum B A O. habet latera A B. A O. æqualia, (*Ex def.* 24.) eſt Iſoſceles habens (*Per* 5. *l.* 1.) angulos ad Baſin B O. inter ſe æquales, & per conſequens, (*Ex* 13. *l.* 1.) etiam anguli deinceps A B K. A O E. ſunt inter ſe æquales. Duo autem triangula A B K. A O E. ſunt Iſoſcelia, nam O E. intercepta ab arcu P O B., & arcu F E D. habente pro centro punctum I. interſecationis, quam facit perpendicularis L S. cum latere F A., jam in tertia proposi-

positione, & demonstratione ostensa est æqualis abscissæ PF., & consequenter æqualis semidametro AP., vel AO.. Dum igitur dicta duo triangula habent latera inter se æqualia, & angulos à dictis lateribus contentos etiam æquales, (*Per* 4., *&* 5. *l.* 1.) habent tàm bases, quàm angulos ad easdem bases æquales, ideòq; triangulum EAK. est Isosceles, sed triangulum HAG. est etiam Isosceles, & dicta duo triangula habent angulos ad verticem A (*Ex* 15. *l.* 1.) inter se æquales, ergo (*Per* 32. *l.* 1.) habent etiam, & reliquos angulos ad bases EK. HG. inter se æquales; Sed angulus BAK ostensus est æqualis angulo K., sunt enim ad basim Isoscelis ABK.. Ergo est etiam æqualis angolo KHG. Angulus QAG., (*Ex* 32. *l.* 1.) ut externus triangulo AHG est æqualis duobus internis, & oppositis angulis H. G. Ideòque duplus anguli H., & consequenter etiam duplus anguli BAK., diviso igitur bifariam angulo QAG., totus Angulus datus BAG. erit divisus inter tres partes, vel angulos inter se æquales, quod est propositum.

Eodem modo dividitur quilibet alius angulus, sive rectus sive obtusus; nam diviso priùs bifariam Angulo, tàm recto, quàm obtuso in duos acutos angulos, illorum dimi-

midium dividendum eſt in tres partes, vel angulos inter ſe æquales, quarum duæ partes ſimul ſumptæ efficiunt tertiam partem totius anguli ſecti; Quemadmodum ſi angulus datus B A G. eſſet dimidium unius anguli, duæ ejus partes, ideſt angulus Q A G. eſſet tertia pars totius anguli à principio dati.

Animadvertendum tamen eſt, quod angulus rectus poteſt etiam dividi, ut jacet abſque neceſſitate illum dividendi in duos acutos angulos; & ut hoc meliùs pateat videbitur in ſequenti problemate ſecundo.



PRO-

PROBL. II. PROPOS. V.

DAto angulo recto, illum dividere in tres partes, vel angulos inter se æquales.

Figura Sexta.

SIt datus angulus rectus tripartito dividendus BAG; protrahatur hinc indè indefinitè latus BA., & capto ad libitum intervallo, ut BA. facto centro in angulo A.; ducatur circulus BGH., & eodem retento inter-

intervallo, centro B. ducatur arcus C M., deindè intervallo totius diametri B P. fiat triangulum æquilaterum B D P., & protrahatur latus D B. uſque ad aliquod punctum K. Arcus C M., denique jungantur D A. A O., & a puncto K. per centrum A. ducatur K A. uſque ad aliquod punctum H. circumferentiæ circuli, & jungatur H G.

Quoniam triangulum B A O. habet latera A B. A O. æqualia eſt Iſoſceles, habens (*Per* 5. *l.* 1.) ad baſim B O. angulos æquales, ideòq; etiam anguli deinceps ABK. AOD [*Ex* 13. *l.* 1.] ſunt inter ſe æquales. Jam ſupra oſtenum eſt latus B D. trianguli æquilateri B D P. ſecari bifariam ab arcu ſemicirculi B O P. Dum igitur latera A O. O D. ſunt inter ſe æqualia, & ſimiliter æqualia latera A B. BK., & anguli deinceps à dictis lateribus contenti æquales [*Per* 4. *l.* 1.] erunt quoque, & baſes AK. AD. æquales, & tota triangula ABK. A O D. æquantur, ideòque anguli ad dictas baſes A D. A K. ſunt inter ſe æquales.

Diameter B P. diviſa eſt bifariàm à recta DA. ergo [*Ex* 3. *l.* 3.] ad angulos rectos, dum igitur angulus D A B., eſt rectus, & pariter rectus datus angulus BAG., duæ lineæ G A. A D. [*Per* 14. *l.* 1.] ſunt in directum,

ctum, & GD. est una tantùm linea. Duæ AD. AK. ostensæ sunt æquales, ideòque triangulum DAK. est Isosceles; sed etiam triangulum GAH. est Isosceles, & habent angulos ad verticem A. [*Per* 15. *l.*1.] inter se æquales, ergo [*Ex* 32. *l.*1.] etiam æquales reliquos angulos ad bases GH. DK. Sunt igitur duo anguli GHK. HKB. inter se æquales, sed angulus BKA. ostensus est æqualis angulo BAK., ergo anguli BAK. AHG. [*Per ax.* 1.] sunt etiam æquales inter se. Angulus QAG., ut externus triangulo AHG. [*Ex* 32. *l.*1.) est æqualis duobus internis, & oppositis angulis H. G., qui cum sint inter se æquales, erit angulus externus QAG., duplus anguli H. & consequenter etiam duplus anguli BAK., & idcircò diviso bifariam angulo externo QAG. totus angulus rectus BAG. à principio datus erit divisus in tres partes, vel angulos inter se æquales, quod volebamus.

Solus igitur angulus obtusus videtur, quod sit dividendus priùs bifariam, ut trisecta una ipsius medietate, dividatur postea totus angulus obtusus datus in tres partes, vel angulos inter se æquales; sed ad explendam ingeniorum curiositatem [licet hoc non sit necessarium], dividam quoque trifa-

riam

riam angulum obtusum , ut jacet, absque necessitate illum dividendi priùs bifariam.

Præmitto nihilominùs, quod cum angulus obtusus constet ex angulo recto, & acuto, , oportet ut aliqua divisio fiat in solo acuto angulo, qui habere debet proportionem sexquialteram ad angulum contentum intra angulum trianguli æquilateri, ad hoc, ut postea datus angulus obtusus dividatur, ut jacet in tres partes, vel angulos inter se æquales, prout meliùs ex sequenti problemate dignoscetur.

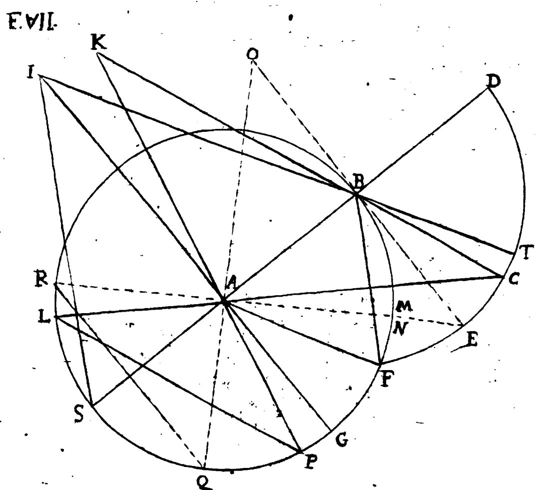


PRO-

PROBL. III. PROPOS. VI.

DAto quocumque angulo obtuso; Illum trisecare ut jacet.

Figura Septima.



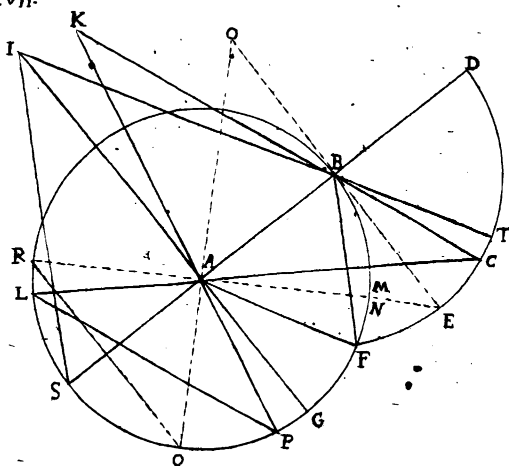
SIt datus angulus obtusus dividendus in tres partes æquales, angulus B A P., qui contineat angulum rectum, & octavam par-

partem ejusdem recti; hoc est sit totus angulus obtusus datus graduum 101 $\frac{1}{4}$, protrahatur latus B A. indefinitè hìnc, indè, & capto ad libitum intervallo, ut B A., facto centro in angulo A. ducatur circulus B G L., & eodem retento intervallo, centro B. ducatur arcus D T F., deindè capto intervallo diametri B S. construatur triangulum æquilaterum B I S., protrahaturque latus I B. usque ad aliquod punctum T. Arcus D T F., & per punctum B. ducatur recta E O. (*Ex* 31.*l.*1.) paralella G I., jungaturque B F.. Postea dividatur angulus TBF in octo partes æquales, & sit octava pars, angulus T B C. protrahatur latus C B. indefinitè, & similiter protrahatur latus P A., donec concurrat cum latere C B. protracto ad aliquod punctum K. Denique ducatur C A., & protrahatur usq; ad circumferentiam ad aliquod punctum L. & jnugantur L P. F A.

Quia datus angulus obtusus, constat ex angulo recto, & octava parte recti est graduum 101 $\frac{1}{4}$, nam gradus 11 $\frac{1}{4}$, octiès sumpti efficiunt gradus nonaginta anguli recti, sed angulus T B C. est etiam ex constr. octava pars anguli T B F. Ergo, ut est rectus angulus GAS. ad angulum TBF.

ita

Figura Septima.



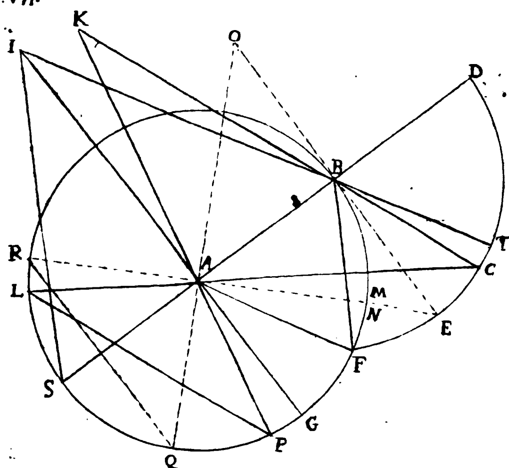
ita est angulus G A P. ad angulum T B C. Angulus G A S. habet proportionem sesquialteram ad angulum T B F. , ergo & angulus G A P. eamdem habet proportionem ad angulum T B C. Quod angulus rectus G A S. habeat proportionem sexquialteram ad angulum T B F., ita ostenditur.

Angulus A B I. trianguli æquilatari B I S. constans ex duobus tertiis partibus anguli recti, est graduum sexaginta, ideòq; angulus ad verticem D B T. tot graduum erit. Recta E O. ducta est paralella G I. Ergo si an-

si angulus I A B. (*Per* 3.*l*.3.) est rectus, etiam (*Ex* 28. *l.* 1.) angulus A B O. internus, & ad easdem partes, erit rectus; dempto igitur ab angulo A B O. angulo A B I. graduum 60. reliquus angulus I B O. erit graduum 30., sicuti 30. graduum erit quoque angulus ad verticem T B E. similiter angulus A B F., quia est angulus trianguli æquilateri A B F. est graduum 60., ablato igitur ab angulo recto A B E. dicto angulo A B F., erit reliquus angulus E B F. pariter graduum 30., sed etiam angulus T B E. ostensus est graduum 30., ergo totus angulus TBF. est graduum 60.; hoc est angulus trianguli æquilateri. Sed nonaginta ad 60. gradus habent proportionem sexquialteram, nam nonaginta continent semel sexaginta, & eorum dimidium triginta. Si igitur triangulum G A S. habet proportionem sexquialteram ad angulum T B F., etiam angulus G A P. octava pars anguli recti G A S., habet eamdem proportionem ad angulum T B C. octava pars anguli trianguli æquilateri T B F., quod volebamus.

Prosequamur nunc nostram demonstrationem. In triangulo BAK. Angulus A. (*Ex* 32., *&* 13. *l.* 1.) est graduum 78. $\frac{1}{4}$, quia angulus deinceps B A P. captus est gra-

Figura Septima.



duum 101. $\frac{1}{4}$, angulus T B C. octava pars anguli graduum sexaginta, est graduum 7 $\frac{2}{4}$, & angulus ad verticem I B K. (*Per* 15. *l.* 1.) erit pariter graduum 7 $\frac{2}{4}$, addito igitur angulo I B K. ad angulum 60. graduum A B I, erit totus angulus A B K. graduum 67. $\frac{2}{4}$, ergo in dicto triangulo A B K., cum sit angulus A. graduum 78. $\frac{1}{4}$, angulus B. graduum 67. $\frac{2}{4}$, (*Ex* 32. *l.* 1.) erit reliquus angulus K. graduum 33. $\frac{1}{4}$, In triangulo A B C. angulus B. ut deinceps ad angulum ABK. graduum 67. $\frac{2}{4}$, est graduum 112 $\frac{2}{4}$,

ideò-

Ideòque reliqui duo ad basim AC. simul sumpti sunt graduum 67. $\frac{2}{4}$, & quia ut ad basim Isoscelis sunt æquales, erit quilibet eorum graduum 33. $\frac{3}{4}$, sed angulus K. ostensus est pariter graduum 33. $\frac{3}{4}$, est igitur triangulum KAC. [*Ex* 5.*l.* 1.) Isoscelium. Triangulum PAL. est etiam Isosceles, & quoniam dicta duo triangula [*Ex* 15. *l.* 1.] habent angulos ad verticem A. inter se æquales (*Per* 32. *l.* 1.) habent quoque, & angulos ad bases KC. LP. inter se æquales. Dum igitur anguli alterni PLC. LCB. sunt æquales inter se, & angulus BAC. ostensus est æqualis angulo BCA., est etiam angulus BAC. [*Per ax.* 1.] æqualis angulo ALP.. Sed angulus MAP. externus triangulo ALP. (*Ex* 32. *l.* 1.] est æqualis duobus internis, & oppositis angulis inter se æqualibus L.P.. Ergo angulus MAP. duplus est anguli L., & per consequens etiam duplus anguli BAC., qui ostensus est æqualis angulo L., Ideòque diviso bifariam angulo MAP. totus angulus obtusus datus BAP. erit divisus in tres partes, vel angulos inter se æquales. Dato igitur quocumque angulo obtuso &c., quod erat demonstrandum.

Iterum dividatur bifariam angulus re-

Figura Septima.

F. VII.

ctus G A S. recta Q A., & quia etiam recta E B. dividit bifariam angulum 60. graduum T B F., ut jam est probatum, etiam angulus G A Q. dimidium recti habet eamdem proportionem sexquialteram ad angulum T B E. dimidium anguli T B F., quam habet totus angulus G A S. ad totum angulum T B F. Stante igitur dicta angulorum proportione, eodem modo probatur, rectam lineam ER. dividere trifariam obtusum angulum datum B A Q.

Protrahantur rectæ lineæ Q A. E B.

(*Ex*

(*Ex def.* 13.) donec concurrant ad aliquod punctum O. ; [nam duo anguli BAO. ABO. sunt duobus rectis minores], & à puncto E. per centrum A. ducatur recta E.R. , & jungatur RQ. , simili modo probatur rectam EA. dividere in tres partes æquales angulum obtusum datum BAQ., quod ita ostenditur.

Quia angulus obtusus datus BAQ. constat ex angulo recto, & semirecto, est graduum 135. Ergo angulus deinceps BAO. est graduum 45., idest semirectus est angulus: ostensus est angulus ABO. rectus, ergo in triangulo ABO. (*Per* 32. *l.* 1.) reliquus angulus O. est etiam semirectus. In triangulo ABE. angulus B. est rectus, ideòque anguli ad basim EA. simul sumpti (*Ex* 32. *l.* 1.) sunt uni recto æquales, sed dictum triangulum est Isosceles, ergo quilibet angulus ad basim EA. est semirectus; Ostensus est etiam semirectus angulus O., ideòque triangulum AOE. est Isoscelium; sed triangulum RAQ. est etiam Isosceles, & dicta duo triangula habent angulos ad verticem A. (*Per* 15. *l.* 1.) inter se æquales, ergo etiam angulos ad bases OE. RQ. (*Ex* 32. *l.* 1.) habent inter se æquales. Angulus BAE. ostensus est

æqualis angulo BEA. Ergo ſi angulus BEA. eſt æqualis angulo ARQ., (*Per ax.* 1.) etiam angulus BAE. erit æqualis angulo ARQ., ſed angulus MAQ. externus triangulo ARQ. (*Ex* 32.*l.*1.) æqualis eſt duobus angulis internis, & oppoſitis R.Q., & duplus per conſequens anguli R., erit quoque duplus anguli BAN., qui oſtenſus eſt æqualis angulo R. Diviſo igitur bifariam dicto angulo externo MAQ., erit totus angulus obtuſus datus BAQ. diviſus in tres partes, ſive angulos inter ſe æquales, quod erat propoſitum.

In his demonſtrationibus habitis pro angulis obtuſis; capti ſunt anguli acuti excedentes angulum rectum noti in eorum gradibus ad oſtendendam veritatem proportionis aſſumptæ, hoc eſt ſexquialteræ; qua proportione ſervata, etiam in omnibus acutis excedentibus angulum rectum, ſed non notis; dummodo ipſi priùs triſecentur, & poſtea in angulo 60. graduum fiat angulus æqualis angulo duarum partium dicti anguli acuti triſecti; promanabit ſemper eadem triſectio cujuſcumque anguli obtuſi à principio dati, ut jacet, prout ex ſe patet. &c.

F I N I S.

D E

DE ALIA NOBILIORE
VIA, ET REGULA.
TRISECANDI QUEMCUMQUE ANGULUM PLANUM,

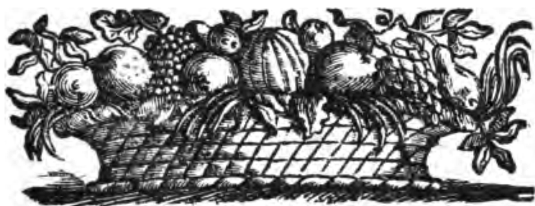
Ut in se est; imò, & dividendi In quot partes impares, & inter se æquales unusquisque voluerit:

ABSQUE NECESSITATE

Dividendi obtusum angulum in duos acutos angulos, aut in acutum, & rectum.

ET CONSEQUENTER
DE METHODO

Describendi in circulo quemcumque Regularem, & imparium laterum Polygonum.





DE MULTIPLICI ANGULI DIVISIONE.

PROBL. I. PROPOS. I.

DAtis duabus rectis lineis angulum obtusum efficientibus, invenire extra datas lineas duo puncta, à quibus si ducantur duæ rectæ lineæ ad datum angulum, ipsum dividant in tres partes, vel angulos inter se æquales.

Sit

Figura Octava.

F. VIII.

SIt datus angulus obtusus A B C., qui dividendus sit in tres partes æquales. Protrahantur primùm lineæ efficientes angulum indefinitè; deinde intervallo ad libitum, facto centro ad punctum B. secetur recta B A. in tres partes succesivè æquales, ut B P. P H. H A., ita, ut B A. sit tripla BP., postmodum intervallo BA., centro B. ducatur arcus A G C., & jungatur A C., ad quam ducatur à puncto P. recta P N. paralella B C., & à puncto H. ducatur

catur HM. eidem BC. paralella: Postea dividatur bifariam arcus AGC. ad aliquod punctum G., & jungantur GC. GA., atque à puncto N. ducatur recta NO. paralella GC., & à puncto M. ducatur recta MI. paralella GA. Denique à centro B., per punctum O. intersecationis, ducatur BD. indefinitè, & intervallo Semidiametri BA., vel BC. à puncto S. intersecationis, quam facit recta BD. cum recta AC., abscindatur æqualis SK., & centro K. eodem intervallo ducatur arcus SA., jungaturque AK., atque à puncto A. ducatur AE. perpendicularis ad BK., & jungatur EB.

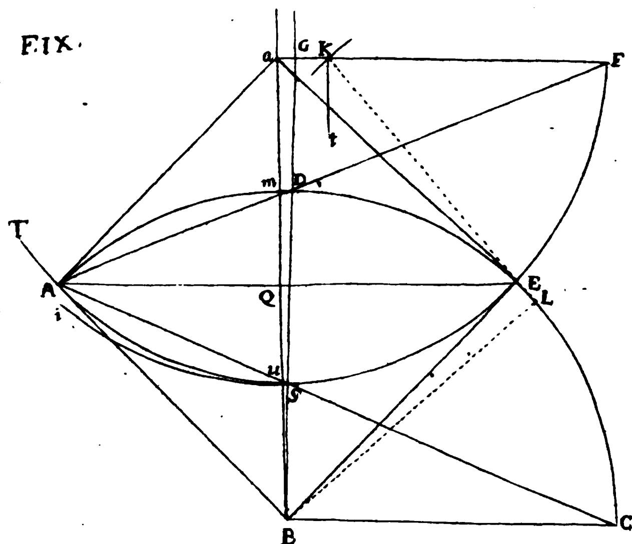
Antequam veniam ad demonstrationem, præmittendum est lemma sequens.

LEMMA

FIat altera figura omninò similis, & æqualis jam factæ, & pariter à puncto B. per punctum D. ducatur recta BD. indefinitè, & ab eodem puncto B. ducatur à sinistra parte recta Ba. similiter indefinitè, sed quantò magis fieri potest propinqua rectæ BD. Deindè capiatur intervallum arcus Am. & centro C. abscindatur æqualis arcus CL.

jun-

Figura Nona.



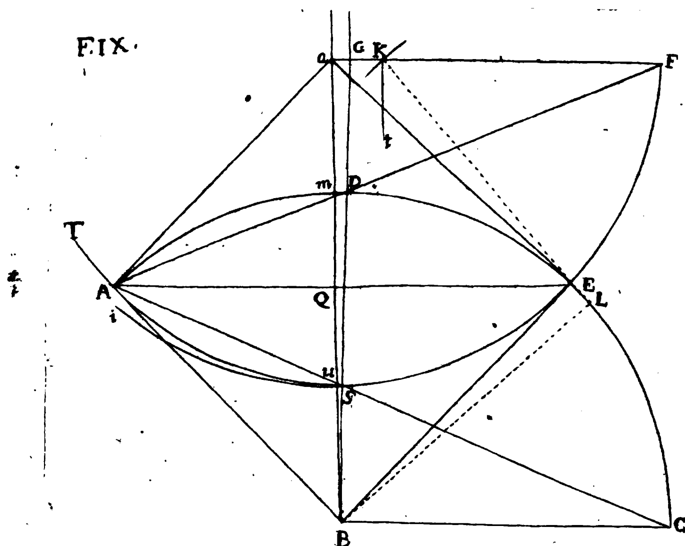
jungaturque L B., atque intervallo Semidiametri B A., vel B C. á puncto u. interſecationis, quam facit B a. cum recta A C. abſcindatur æqualis v a., & ſimiliter eodem intervallo à puncto S. intersecationis, quam facit B D. cum eadem recta AC. abſcindatur æqualis SG., & eodem retento intervallo à centro G. ducatur arcus S T., & à centro a. ducatur arcus u i., & denique a puncto L. ſignetur verſus punctum G. arcus K., dico, quod arcus S T. tranſit per punctum A. Si

Si dictus arcus non transit per punctum A., transibit per dictum punctum aliquis arcus ductus intervallo semidiametri habentis centrum in aliqua recta linea posita propè rectam BG.: ut est Ba., vel alia. Et primum si est possibile transeat per dictum punctum A. arcus ui. ductus intervallo au., protrahatur dictus arcus iu. versus F. indefinitè, & à puncto A. per punctum m. intersecationis, quam facit recta Ba. cum arcu ADC. ducatur recta Am. quæ protrahatur donec occurrat arcui iu EF. protracto ad aliquod punctum F., & jungantur aF. aA. aE. EB. EA. & à puncto L. ad punctum K. intersecationis, quam facit recta aF. cum arcu K., ducatur recta LK. & ab eodem puncto K. super aF. excitetur perpendicularis Kt.

Quia supponitur arcum ui. ductum semidiametro au. transire per punctum A., duo aA. au. [*Ex def.* 15.] ut semidiametri ejusdem circuli, sunt inter se æqualia. Similiter quia Bm. au. sunt per constructionem æqualia, dempto ab ipsis commune mu., quæ remanent Bu. am. ex 3. ax. sunt inter se æqualia. In triangulis Aam. ABu. latera BA. Aa. sunt ex hypothesi æqualia, & pariter æqualia latera am. Bu.,

sed

Figura Nona.



ſed anguli à dictis lateribus contenti, ut ad baſin trianguli Iſoſcelis B A a. [*Per* 5. *l.* 1.] ſunt etiam æquales, ergo & baſes Am. Au. [*Per* 4. *l.* 1.] ſunt inter ſe æquales, & tota triangula æquantur; ideòque anguli ad punctum A. oppoſiti æqualibus lateribus a m. B u. [*Ex p.* 8. *l.* 1.] ſunt æquales, ſed dicti anguli ſunt ad baſes duorum Iſoſcelium æqualium laterum A B C. A a F., ergo [*Per p.* 26. *l.* 1.] dicta triangula æquantur, & latera A C. A F. oppoſita æqualibus

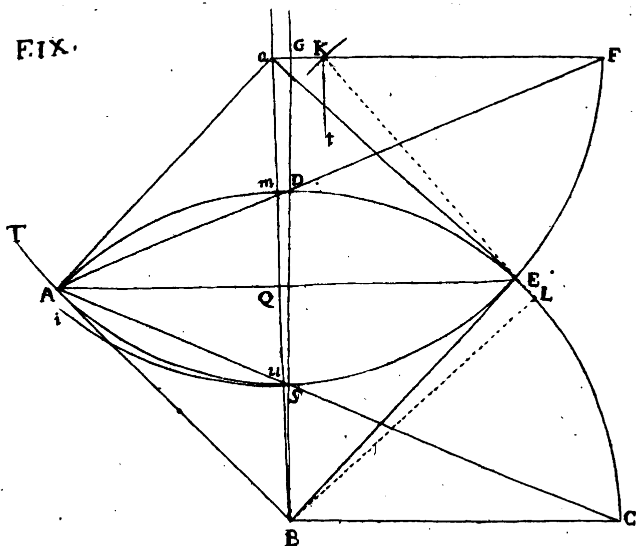
ad

ad vertices angulis, (*Ex p.8.l.1.*) sunt inter se æqualia; & idcircò ab æqualibus circulis [*Per p.* 28. *l.3.*] auferunt æquales peripherias; sunt igitur duo arcus A m E C. A u E F. inter se æquales, à quibus demptis duobus arcubus A D E. A u E. inter se æqualibus [*Ex p.28.l.3.*], ut subtensis ab eadem recta A E., arcus, qui remanent EC. E F. [*Per axiom.3.*] sunt inter se æquales.

Similiter duo arcus A m. C L. quoniam sunt ex constructione æquales, anguli A B m. C B L. ad centrum B. ipsis insistentes sunt per 27. l. 3. etiam æquales inter se, & quia angulus F K T. factus est rectus, erit angulus F K L. recto minor, ideòque angulus deinceps L K a. per 13. l. 3. erit obtusus, & idcirco in triangulo L K a. si ducatur basis a L., erit dicta basis subtendens angulum K. obtusum per 18. l.1. major L K. facta æquali semidiametro circuli, & propterea si á centro a. intervallo semidiametri ducatur arcus, necessariò dictus arcus secare debet basim a L. ad aliquem punctum E., nec transire potest per punctum extremum L. dictæ basis, ut est manifestum.

Considerentur nunc duo triangula B A a. B E a., & quia habent latera ęqualia, & basin B a. communem (*Per* 8. *l.* 1.) ęquantur;

Figura Nona.

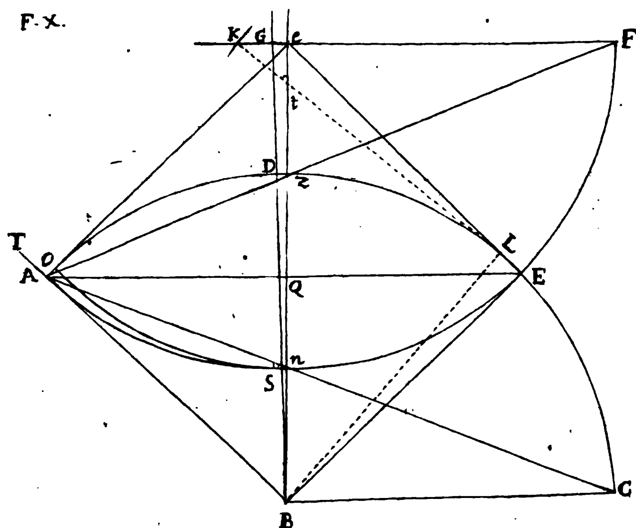


tur; & anguli ad punctum B. oppositi æqualibus lateribus A a. E a. sunt æquales. In triangulis igitur A B Q. E B Q. habemus latera B A. B E. æqualia, latus B Q. commune, & angulos á dictis lateribus contentos æquales, ergo habemus etiam, [*Ex p.*4. *l.* 1.) & bases A Q. Q E. inter se æquales, & tota triangula æquantur; ac per 8. l. 1. sunt æquiangula; & idcircò B a. dividens bifariam basim A E. dividit ad angulos rectos, & per consequens, [*Per pr.* 10. *l.* 13.

l. 13.] dividit etiam bifariam arcum A m E. ab illa subtensum; ideòque duo arcus a m. m E. sunt inter se æquales. Ostensi sunt pariter æquales duo arcus E C. E F., & propterea [*Ex. pr.* 27. *l.* 3.] anguli etiam ad circumferentiam E A F. E A C. ipsis insistentes sunt inter se æquales; sed dicti anguli insistunt etiam duobus arcubus mE. EC., ergo & ipsi sunt æquales inter se; arcus A m. ostensus est æqualis arcui m E., ergo omnes tres arcus A m. m E. E C. sunt inter se æquales, & consequenter [*Per pr.* 27. *l.* 3.] etiam anguli A B m. m B E. E B C. ad centrum B. ipsis insistentes sunt inter se æquales, sed duo anguli A B m. C B L. ostensi sunt etiam inter se æquales. Si igitur angulus A B m. est æqualis angulo C B E., erit quoque eidem angulo C B E. æqualis angulus C B L. pars, & totum, quod est absurdum. Non igitur arcus u i. transire potest per punctum A., quia cum recta a A. minor sit semidiametro a u., arcus u i. ductus dicta semidiametro transit supra punctum A., ut ex demonstrato absurdo redditur manifestum.

Idem est de arcu n o. ducto intervallo semidiametri e n. habentis centrum e. in recta B e. posita ad dexteram rectæ B G.,

Figura Decima.



prout in præſenti figura omnino ſimili, & primæ figuræ æquali. Tranſeat ſi eſt poſſibile dictus arcus n o. per punctum A., & à puncto A. per punctum z. interſecationis, quam facit recta B e.. cum arcu ADC. ducatur recta A z. indefinitè, poſtea capiatur intervallum arcus A z., & facto centro ad punctum C. abſcindatur æqualis arcus C L., & jungatur L B., atque intervallo ſemidiametri e n., centro e. protrahatur ar-

eus

cus on B., donec secet indefinitam A z. ad aliquod punctum F. , & jungantur e F. e A. e E. E B. A E. , & tandem protracta aliquantulum recta F e., intervallo semidiametri, centro L. ducatur versus G. arcus K., & à puncto K. intersecationis, quam facit recta F e. cum arcu K., ducatur K L., atque ad punctum e. rectæ K F. excitetur perpendicularis e t.

In hac constructione ne inutiliter repetam, quod jam demonstratum est, probatur ijsdem argumentis, e L. partem semidiametri e E. minorem esse recta K L. facta æquali semidiametro e E., ideóque arcus ductus à centro e. intervallo semidiametri e E. necessariò transire debet supra punctum L., ut patet. Et probatur quoque duos angulos C B E. C B L. esse inter se æquales; pars, & totum, quod est absurdum. Non igitur arcus n o. transire potest per punctum A., quia recta e a. major est semidiametro e n. Ideòque arcus n o. transit infra punctum A., ut patet ex absurdo, quod oritur ex dicta inæqualitate. Dum igitur neque arcus u i. in antecedente figura, neque arcus n o. in præsenti figura, licet habeant centrum in rectis lineis positis hinc indè prope rectam B G., transire

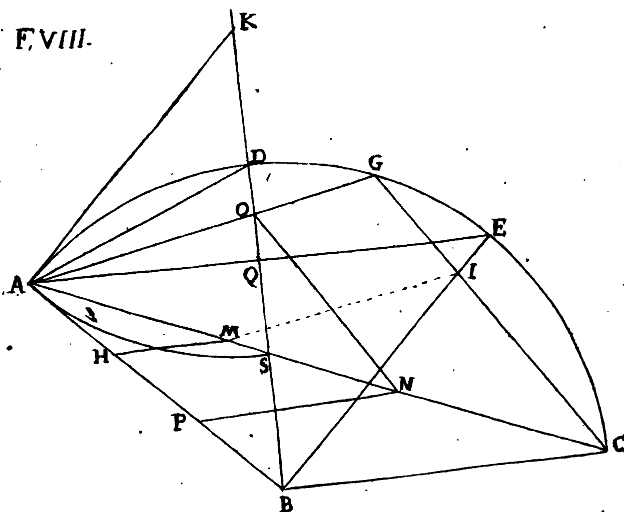
 pos-

possunt per punctum A., sequitur necessariò, quod arcus A T. habens centrum in recta B G., transeat per dictum punctum A.; quod est propositum,

Redeo nunc ad octavam figuram, ut absolvam problema propositum.

Quia arcus ductus semidiametro K S. transit per punctum A., ut jam est demon-

Figura Octava.



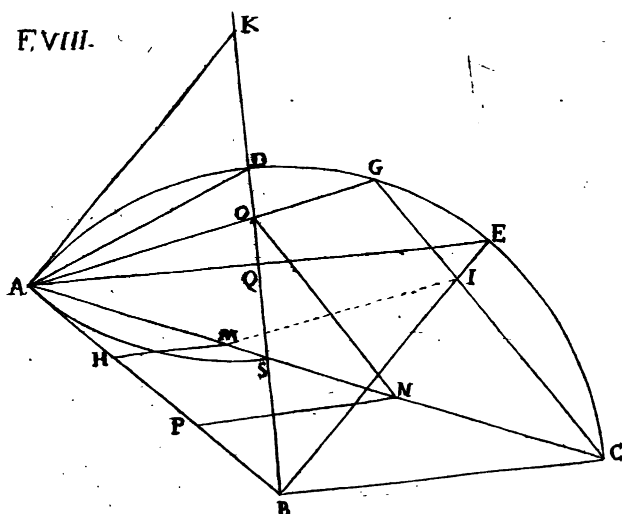
stratum, sequitur, quod duæ rectæ K S. K A. [*Ex def.* 15.] ut semidiametri ejusdem circuli sint inter se æquales; ideòque duo

tri-

triangula Isoscelia B A D. K A S., quoniam habent angulos ad vertices B. K. æquales [*Per p.5.l.*1.] [sunt enim ad basin Isosceles B A K.] [*Ex pr.32.l.*1.] habent etiam angulos ad bases A S. A D. inter se æquales. In triangulis igitur A Q D. A Q S. habemus angulos D. S. æquales, angulos ad punctum Q. pariter æquales, hoc est rectos, dum A E. [*Per* 11 .*l.*1.] ducta est perpendicularis ad B K. , ergo & reliqui anguli ad punctum A. [*Ex 32.l.*1.] sunt inter se æquales, & quoniam dicti anguli sunt ad circumferentiam circuli A D C., & insistunt arcubus D E. E C. (*Per pr.26.l.3.*) sunt dicti arcus inter se æquales.

Insuper quia A E. dividit rectam B D. ad angulos rectos, vicissim etiam ipsa dividitur ad angulos rectos à recta BD., ideòque [*Ex pr.3.l.3.*], dividitur bifariam, sicuti etiam dividitur bifariam ab eadem B D. [*Per pr.*10.*l.*13.] arcus A D E. ab illa subtensus, & propterea duo arcus A D. D E. sunt inter se æquales: arcui D E. ostensus est etiam æqualis arcus E C., sunt igitur [*Per ax.* 1.]omnes tres arcus AD. DE. E C. inter se æquales. In triangulo A O N., quia O N. ducta est paralella G C. [*Ex pr.28.l.*1.) angulus externus O N A. est

Figura Octava.

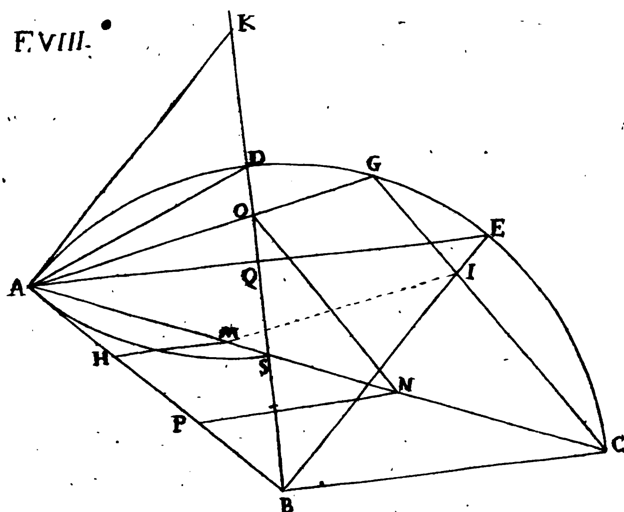


æqualis angulo interno, & opposito GCA., & similiter in triangulo CIM., quia recta IM. est paralella GA. per constructionem, angulus externus IMC. est æqualis interno, & opposito angulo GAC., & propterea omnes quatuor anguli A. M. N. C. sunt inter se æquales, & duo triangula AON. CIM. sunt isoscelia. Latus BA. divisum fuit in tres partes inter se æquales BP. PH. HA. & idcirco rectæ PN. HM. paralellæ ex constructione lateri BC. (*Ex pr.* 10.*l*.6.) divi-

dividunt etiam rectam AC. in tres partes inter se æquales CN. NM. MA. Si igitur tàm parti CN. quàm parti AM. addatur commune NM. (*Per ax.2.*) erit tota CM. toti AN. æqualis; Sed CM, AN. sunt bases duorum Isoscelium CIM. AON. [*Per pr.26.l.1.*] ergo dicta duo Isoscelia æquantur, & latera AO. CI. opposita æqualibus angulis [*Ex pr.8.l.1.*] sunt æqualia.

Considerentur nunc duo triangula ABC. GAC., quæ cum sint Isoscelia, tàm triangulum ABC.; quàm triangulum AGC. (*Per pr.5.l.1.*) habet suos angulos ad basin AC. inter se æquales, & propterea si æqualibus angulis BAC. BCA. addantur æquales anguli GAC. GCA., (*Ex ax.2.*) erunt anguli BAG. BCG. inter se æquales. In triangulis igitur BCI. BAO. habemus latera BA. BC. æqualia; latera CI. AO. pariter ostensa inter se æqualia, & angulos à dictis lateribus contentos æquales; Ergo (*Per pr.4.l.1.*) & bases BI. BO. sunt inter se æquales, & tota triangula æquantur, & idcircò anguli ad centrum B. oppositi æqualibus lateribus CI AO. [*Per pr.8.l.1.*] sunt inter se æquales, & per consequens [*Ex pr.26.l.3.*] insistunt æqualibus arcubus; sed arcus AD. EC. ostensi sunt inter se æqua-

Figura Octava.



les, ergo recta linea ducta à puncto E. ad centrum B. transire debet per punctum I. intersecationis, quam facit paralella MI. cum latere GC., nam si recta BI. producta secare debet arcum æqualem arcui AD., dum arcus EC. ostensus sit æqualis arcui AD., necessariò cadere debet ad punctum E., & propterea recta EB. transire debet per punctum I.. Omnes tres arcus AD. DE. EC. ostensi sunt inter se æquales; ideòq; anguli ABD. DBE. EBC.

ad

ad centrum B. dictis arcubus insistentes [*Per pr.27.l.3.*] sunt inter se æquales; sed dicti tres anguli dividunt totum angulum obtusum à principio datum; fiuntque à duabus rectis lineis D B. E B. ductis à punctis D. E. extra lineas dati anguli inventis. Datis igitur &c. quod faciendum, ac demonstrandum erat.

Poterat breviùs demonstrari problema, sed necessarium erat perficere demonstrationem duobus triangulis Isosceliis A O N. C I M. propter divisionem anguli in plures quàm tres tantùm partes æquales. hoc est in quinque, in septem &c. prout melius apparebit in sequentibus problematibus.

Ex demonstratis eruitur, quod duæ rectæ B D. B E. ductæ à centro B. per puncta intersecationum O. I. usque ad arcum A G C. dividunt illum in partem aliquotam D E., idest in tertiam partem totius arcus, servata proportione divisionis lateris B A. dati anguli, similiter divisi in tres partes inter se æquales; quæ proportio deseruit quoque pro aliis divisionibus anguli plani in plures, quàm tres tantùm partes, ut videbimus. Trisectio anguli recti, & acuti est omnino eadem, cum ea, quæ facta est pro angulo obtuso. Fit enim eadem constructio,

& de-

& demonstratio quoque est eadem. En quanta puritate, ac facilitate trisecatur geometricè quilibet angulus planus; ita, ut asserere amplius, trisectionem geometricam anguli plani circino, & regula esse omnino impossibilem; nullam prorsus mereatur fidem &c.



DE

DE MODO

DIVIDENDI GEOMETRICÈ

QUEMCUMQUE

ANGULUM PLANUM

IN QUINQUE PARTES,

VEL ANGULOS

INTER SE ÆQUALES.

ET PRIMU'M

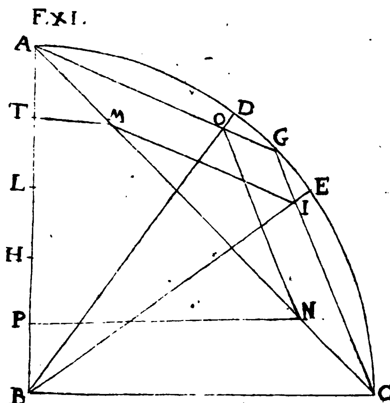
DE ANGULO RECTO.

PLOBL. II. PROPOS. II.

DAtis duabus rectis lineis angulum rectum efficientibus, invenire extra datas lineas quatuor puncta; à quibus si ducantur quatuor rectæ lineæ ad datum angulum, illum dividant in quinque partes, vel angulos inter se æquales.

Sit

Figura Vndecima.



SIt datus angulus rectus dividendus ABC. protrahantur lineæ efficientes angulum indefinitè, deindè intervallo ad libitum, à puncto B. abſcindatur BP., & ſucceſſivè PH. HL. LT. TA., itaut tota recta BA. ſit quintupla BP., poſtea intervallo BA., centro B. ducatur arcus AGC. & jungatur AC., dividaturque bifariam arcus AGC. ad aliquod punctum G., & jungantur GA. GC., atque à punctis P. T. ducantur PN. TM. paràlellæ BC. Denique à puncto M. ducatur MI. paralella AG., & á puncto N. ducatur NO. paralella CG. & per puncta interſecationum I. O. ducantur à centro B. rectæ BE. BD.

Quo-

Quoniam arcus AGC. divisus est bifariam ad punctum G. [*Ex pr.* 29. *l.* 3.] duæ GA. GC. subtensæ æqualibus arcubus sunt inter se æquales, & triangulum AGC. est Isosceles (*Per pr.* 5. *l.* 1.) habens angulos ad basin AC. inter se æquales; & quia NO. ducta est paralella GC., & MI. similiter ducta est paralella GA., (*Ex pr.* 28. *l.* 1.) anguli ONA. IMC., ut externi æquales sunt internis, & oppositis angulis C. A., & idcircò omnes quatuor anguli A. M. N. C. sunt inter se æquales, & per consequens, [*Ex pr.* 5. *l.* 1.) duo triangula CIM. AON. sunt Isoscelia. A paralellis PN. TM. (*Ex pr.* 10. *l.* 6.) recta AC. divisa est in partes CN. AM. inter se æquales, quarum unicuique addito communi MN. (*Per ax.* 2.) tota CM. toti AN. erit æqualis. Sed CM. AN. sunt bases triangulorum Isoscelium CIM. AON., & adjacent angulis ostensis inter se æqualibus, ergo (*Ex pr.* 26. *l.* 1.) tota triangula æquantur, & latera CI. AO. sunt inter se æqualia.

Ulterius quia triangulum ABC. est Isosceles, (*Per pr.* 5. *l.* 1.) habet angulos A. C. ad basim æquales, qui si addantur æqualibus angulis ICA. OAC. (*Ex ax.* 2.) anguli ICB. OAB. erunt æquales, sed dicti anguli conti-

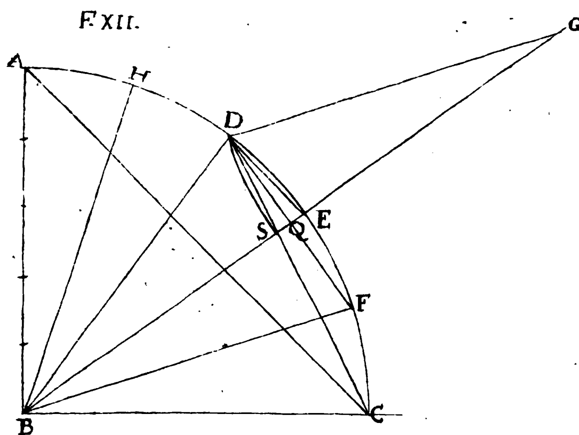
tinentur à lateribus æqualibus IC. OA., & CB. AB., ergo (*Per pr.* 4. *l.* 1.) in triangulis ICB. OAB. bases IB. OB. sunt æquales, & tota triangula æquantur. Ideòque anguli ad centrum B. oppositi æqualibus lateribus IC. OA. (*Ex pr.*8. *l.* 1.] sunt inter se æquales, & per consequens etiam arcus AD. EC. quibus insistunt (*Ex pr.*26.*l.*3.) sunt inter se æquales.

Nunc, ut evitetur multitudo, & confusio linearum fiat alia figura omnino similis, & æqualis jam factæ, & repertis in arcu ipsius duobus punctis D. E. iisdem regulis geometricis, à centro B. per punctum E. ducatur BE. indefinitè, & jungantur BD. DC., deindé intervallo semidiametri BD., vel BC., centro S. intersecationis, quam facit recta DC. cum indefinita BE. abscindatur æqualis SG., & eodem retento intervallo centro G, ducatur arcus SD., jungaturque DG.. Denique ducatur recta DF. perpendicularis ad rectam BG., & jungatur DE.

Quia arcus ductus semidiametro GS. transit per punctum D.; sicuti demonstratum fuit in trisectione anguli superius facta, sequitur, quod GS. GD., ut semidiametri ejusdem circuli (*Ex def.* 15.) sint inter se

æqua-

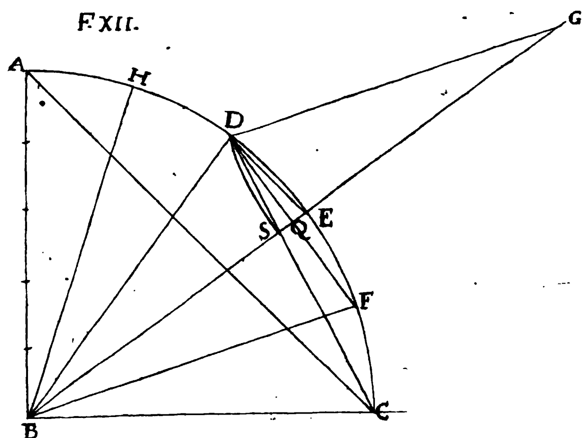
Figura Duodecima.



æqualia; ideòq; duo triangula GSD. BED. quoniam habent latera ex constructione æqualia, & angulos G. B. à dictis lateribus contentos æquales, ut (*Per* 5. *l.* 1.) ad basin trianguli Isoscelis BDG. (*Ex* 4. *l.* 1.) habent quoque & bases DS. DE. inter se æquales, sed dictæ bases sunt latera trianguli EDS., ergo dictum triangulum, (*Per* 5. *l.* 1.) ut Isosceles habet angulos E. S. ad basin ES. inter se æquales. Recta DF., ut perpendicularis per constructionem ad rectam BG. (*Ex* 11. *l.* 1.) dividit illam ad angulos rectos. In triangulis igitur DQE.

PQS.

Figura Duodecima.



DQS. habemus angulos ad punctum Q. rectos, & æquales. Similiter angulos E. S. ostensos æquales, ergo (*Per* 32. *l.* 1.) & reliqui ad punctum D. sunt inter se æquales, & quia dicti anguli sunt ad circumferentiam (*Ex* 26. *l.* 3.) arcus EF. FC., quibus insistunt, sunt inter se æquales. Et quoniam recta DF. dividit ad angulos rectos semidiametrum, BE; vicissim, & ipsa DF. dividitur etiam ad angulos rectos à semidiametro BE., & per consequens (*Per* 3. *l.* 3.) dividitur bifariam; sicuti & bifariam quoque dividitur à dicta semidiametro (*Ex* 10. *l.* 3.

l.13,) arcus D E F. ab illa subtensus. Sunt igitur duo arcus DE. E F. inter se æquales; Sed arcui EF. ostensus est etiam æqualis arcus FC. , ergo tres arcus DE. E F. FC. sunt inter se æquales , & consequenter arcus E C. divisus est bifariam: dicto arcui E C. ostensus est æqualis arcus A D.; Si ergo arcus A D. dividatur bifariam ad aliquod punctum H., omnes quinque arcus AH. HD. DE. E F. FC. erunt inter se æquales; Sed anguli ad centrum B. dictis arcubus insistentes , (*Per* 29. *l*. 3.) sunt pariter æquales inter se , & dividunt totum angulum rectum à principio datum, fiuntque à quatuor rectis lineis ductis ad centrum B. ex quatuor punctis H. D. E. F. inventis extra datas lineas angulum efficientes . Ergo datis duabus lineis &c. quod faciendum erat, ac demonstrandum &c.

Tàm angulus acutus, quàm obtusus dividitur in quinque partes , vel angulos inter se æquales eodem modo , quo factum est in angulo recto, cum sit eadem constructio, & demonstratio, ideòque non est immorandum in eorum constructione, ac divisione.

Ex hac divisione anguli plani in quinque

partes æquales clarius elucescit regula generalis superius data dividendi quemcumque angulum planum in plures partes impares inter se æquales, veluti septem, novem, undecim; Imo in quot quisque voluerit: nam rectæ lineæ ductæ à centro anguli per puncta intersecationum, quas faciunt paralellæ MI. NO. cum lateribus GC. GA. secant arcum in partem aliquotam, ut sunt duo puncta D. E., quorum intervallo abscindi possunt arcus, qui remanent EC. DA., & sic diviso toto arcu in partes æquales, rectæ lineæ ductæ à punctis divisionum ad angulum datum, illum divident in tot partes impares à principio imperatas, juxta placitum Operantis. Et ut melius veritas hujus assertionis palam fiat. Sit.

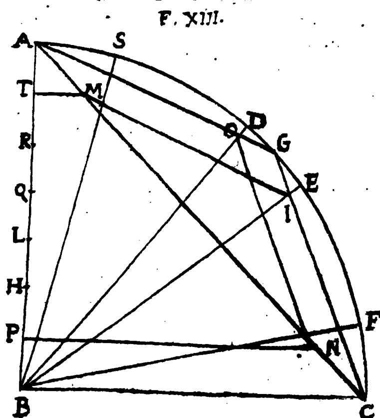


PRO-

PROBL: III. PROPOS. III.

DAtis duabus rectis lineis angulum rectum efficientibus, invenire extra datas lineas sex puncta, à quibus ductis sex rectislineis ad datum angulum, ipsæ dividant illum in septem partes, vel angulos inter se æquales.

Figura Decimatertia.



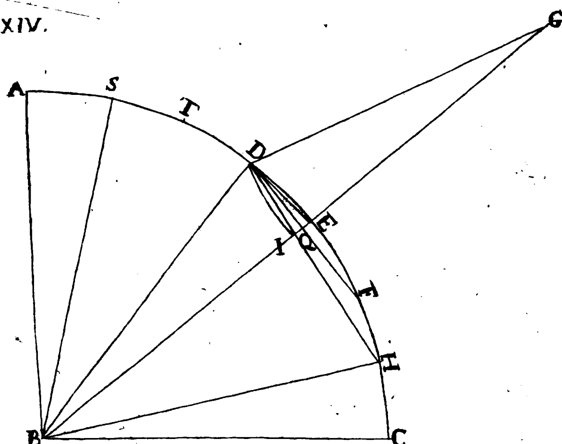
SIt datus angulus rectus dividendus ABC., protrahantur lineæ efficientes angulum indefinitè, & intervallo ad libitum, ut BP. secentur successivè septem æquales partes, ita ut recta BA. sit septupla lineæ BP.

deindè intervallo B A. centro B. ducatur arcus A G C., qui dividatur bifariam ad punctum G., & jungantur A C. G C. G A., postea à punctis P. T. ducantur P N. T M. paralellæ B C., & similiter M I. N O. paralellæ G A. G C., & à centro B. per puncta O. I. intersecationum; ducantur B D. B E., denique capiatur intervallum arcus D E. & facto centro in punctis C. A. abscindantur æquales arcus C F. A S., & jungantur B F. B S.

Demonstratio hujus propositionis, quoniam est omnino eadem cum antecedente demonstratione facta pro anguli quintusectione; non est conveniens inutiliter tempus terere, ac repetere id, quod jàm dictum est. Probatur eodem modo, [*Ex* 4. *l.*1.) duo triangula B C I. B A O. esse inter se æqualia, quia habent tàm latera B A. B C., quàm latera C I. A O. æqualia, & angulos à dictis lateribus contentos pariter æquales, & per consequens etiam basses B I. B O. æquales inter se, Ideòque (*Per* 8. *l.*1.] & angulos quoq; ad centrum B. oppositos æqualibus lateribus inter se æquales, qui cum sint ad centrum (*Ex* 26. *l.*3.) insistunt æqualibus arcubus E C. D A., à quibus demptis arcubus C F. A S. per constru-

structionem æqualibus, qni remanent arcus E F. D S. sunt inter se æquales.

Figura Decimaquarta.



Ad evitandum multitudinem linearum, & confusionem fiat alia figura similis, & æqualis jam factæ, & repertis in arcu ipsius duobus punctis D. E. regulis supra datis, á centro B. per punctum E. ducatur recta B E. indefinitè, deinde intervallo arcus D E., centris C. A. abscindantur æquales arcus C H. A S.; & jungantur B H. B S. B D. D H., denique capto intervallo semidiametri B D., vel B C. à puncto I. intersecationis quam facit recta.

DH. cum indefinita BE. abſcindatur æqualis IG., & eodem retento intervallo, centro G., ducatur Arcus ID., & jungatur DG., & à puncto D. ducatur DF. perpendicularis ad rectam BG. & jungatur DE.

Quia arcus ductus ſemidiametro GI. tranſit per punctum D., ut probatum eſt in anguli triſectione, duæ rectæ GI. GD., ut ſemidiametri ejuſdem circuli, ſunt inter ſe æquales. Duo triangula GDI. BDE. quia habent latera per conſtr. æqualia, & angulos G. B. à dictis lateribus contentos, (*Ex pr.* 5.*l.*1.) pariter æquales, ut ad baſin trianguli Iſoſcelis BDG. (*Per* 4.*l.* 1.] habent quoque, & baſes DI. DE: inter ſe æquales. Eſt igitur triangulum IDE. Iſoſceles habens angulos I. E. ad baſin inter ſe æquales; & quoniam DF. ducta eſt perpendicularis ad rectam BG. [*Ex* 11.*l.* 1.] dividit illam ad angulos rectos ad punctum Q. diviſionis, & idcircò duo triangula DQI. DQE. ſunt æquiangula, habent enim angulos ad punctum Q. rectos, & æquales; ſimiliter æquales angulos I. E. ergo (*Per* 32. *l.*1.) habent quoque, & reliquos ad punctum D. inter ſe æquales; ſed anguli ad punctum D. ſunt ad circumferentiam circuli

Figura Decimaquarta.

F.XIV.

culi, ergo arcus E F. F H. quibus dicti anguli insistunt, (*Ex* 26.*l*.3.) sunt inter se æquales.

Ulterius, quia D F. est intra circulum, & secat semidiametrum B E. ad angulos rectos in puncto Q., vicissim, & ipsa secatur in eodem puncto ad angulos rectos à semidiametro B E., & per consequens (*Per* 3. *l*. 3.) secatur bisariam, sicuti bisariam etiam secatur acus D E F. ab illa subtensus; (*Ex* 10. *l*.13.) & propterea duo arcus D E. E F. sunt inter se æquales; arcui EF. ostensus est etiam æqualis arcus F H., omnes

igitur tres arcus DE. EF. FC. ſunt inter ſe æquales; anguli ad centrum B. dictis arcubus inſiſtentes (*Per* 27.*l*.3.(ſunt pariter æquales inter ſe; diviſus eſt igitur arcus EH. ad punctum F. bifariam: duo arcus EH. DS. oſtenſi ſunt æquales, ergo diviſo bifariam arcu DS. ad aliquod punctum T., erunt duo arcus ST. TD. æquales duobus arcubus EF. FH., ſed arcus DE. oſtenſus eſt æqualis arcubus EF. FH. ergo [*Per ax.* 1.) eſt etiam æqualis arcubus ST. TD., & æqualis per conſtructionem duobus arcubus CH. AS.. Sunt igitur omnes ſeptem arcus AS. ST. TD. DE. EF. FG. HC. inter ſe æquales, & conſequenter [*Ex* 27. *l*.3.) etiam æquales anguli ad centrum B. dictis arcubus inſiſtentes, qui dividunt totum angulum rectum ABC. à principio datum, fiuntque à rectis lineis ductis à ſex punctis S. T. D. E. F. H. ad dictum angulum B. extra lineas illum efficientes inventis. Datis igitur duabus lineis &c., quod erat demonſtrandum &c.

Anguli acutus, & obtuſus dividuntur in ſeptem partes, vel angulos inter ſe æquales eodem modo, quo diviſus eſt angulus rectus. Et ex hac anguli diviſione in ſeptem æquales partes fit magis manifeſtum,

quod

quod primæ rectæ lineæ, quæ ducuntur à dato angulo per puncta intersecationum, quas faciunt paralellæ usque ad arcum, dividunt dictum arcum in partem aliquotam, hoc est in septimam ipsius partem, ut dictum est supra.



Nunc parumper immoremur, ut videamus, quàm facilè in suis thesibus homines decipiantur. Non enim defuerunt etiam magni nominis Autores, qui inter impossibilia posuerunt, describere geometricè in circulo figuras regulares imparium laterum, & præcipuè inter impossibilia posuit Kepplerus descriptionem heptagoni, ut meliùs infra videbimus: Sed quod magis est, quidam Auctor Britannicus in opusculo, cujus titulus: Clavis Arithmetices in hæc verba prorupit: *De angulorum, sive peripheriarum bisectione, trisectione, quintusectione, pauca etiam ad Analystices præstantiam, usumque admirandum ostendendum apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent; Sicut nec mesolabium inventum est.*

Multùm hæc Doctoris Britannici opinio eve-

evehit Analystarum studia, deprimitq; Geometrarum, sed ipsa tandem Geometria excitata facillimè, ut visum est in anguli plani geometrica divisione, suas adimplet partes. Pugnavit quoque acerrimè adversus eam ingenio præditus Kepplerus, qui pluriès sectionem anguli trifariam negaverat, & loquens de heptagoni descriptione, asseruit illam fuisse de numero impossibilium, & tàm pertinaciter hanc tenuit opinionem, ut prorsus ex genere scibilium esse negaverit in volumine Harmonices l. 1. cap. 45., & 46., ubi Auctor suas potiùs ideas sequutus; quám naturæ lumen ad hanc devenit Sententiam. *Heptagoni descriptionem esse ex inscibilibus, quia non præcedit effingendi possibilitas, ideòque latus Septagoni, & consimilium figurarum describi non posse*. Illusus Kepplerus in suis argumentis devenit in hæc non toleranda absurda, videlicet hujusmodi descriptiones impossibiles esse etiam menti omnisciæ actu, ne dum humanæ; & tamen concesserat casui, aut sorti, quod omnisciæ subduxerat menti.

At referamus ejus verba, ut melius illius opinio dignoscatur: *Concludimus igitur* [inquit] *Analyses istas cossicas alienas esse à presente contemplatione, nec ullum consti-*

tue-

tuere gradum scientiæ cum iis comparabilem, quos explicavimus in superioribus. Illud tamen sunt obiter monendi metaphisici occasione hujus Cossæ: Considerent si quid transumere possint ad illius axiomatis demonstrationem, cum non entis nullæ dicuntur esse conditiones, nullæ propietates; nam hic quidem versamur nos in entibus scientialibus, & rectè pronunciamus, quod latus heptagoni sit ex non entibus, puta scientialibus. quàm enim sit impossibilis ejus formalis descriptio, neque enim sciri potest à mente humana, cum scientiæ possibilitatem præcedat ipsa descriptionis possibilitas; neque à mente omniscia actu simplici æterno, quia sua natura ex inscibilibus est, & tamen hujus non entis scientialis sunt aliquæ proprietates scientiales, tamquàm entia conditionalia: Si enim esset septangulum descriptum circulo, laterum ejus proportio, tales haberet affectiones. Hæc Kepplerus pugnantia inter se loquens, nam quantum se deceperit, ex descriptione. quam dabimus, heptagoni, cæterorumque polygonorum regularium in circulo imparium laterum, facilè dignoscetur.

Et quod magis admiratione dignum est, dixit paulò antè: *Itaque nullum umquam regulare septangulum à quoquam constructum*

est

est sciente, & volente, & ex proposito agente; Sed benè fortuitò construi posset, & tamen ignorari necesse est, sit ne constructum an non? Potest igitur per Kepplerum construi fortuitò septangulum, & tamen necesse est ignorari, nè dum à mente humana, sed etiam à mente omniscia actu simplici æterno, sit ne constructum, an non? Et quis potest capere paradoxa tàm absurda?

Sed audiamus Clavium præstantissimum Geometram S. I., qui semper, ut assolet moderatè loquens ad calcem *lib.* 4. *element. Euclid.* hæc habet: *Si igitur inventa fuerit ars, qua Isoscelia triangula construantur habentia angulos ad basim multiplices eorum, qui ad vertices sunt angulorum; quemadmodum Euclides Isosceles fabricavit, habens utrumque angulum ad basim duplum anguli ad verticem, facilè in circulo describerentur figuræ omnium laterum imparium: Et si arcus eorum dividantur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum post quadratum; atque adeò circumferentia cujuslibet circuli in quotlibet æquales partes geometricè divideretur, quæ res summam Astronomis afferet vtilitatem. Verùm hæc ars adhuc ignota existit. Non enim rec-*

tè

tè eam sibi vendicat Orontius Finæus in libello hactenùs, ut ipse ait, desiderato de absoluta figurarum rectilinearum descriptione intra circulum: Cum ejus demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, ut geometricè ostensum est à Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontii. Ita Clavius.

Magnam igitur afferret Astronomis utilitatem invenire viam aliquam describendi in circulo quamlibet figuram laterum parium, & imparium æquilateram, & æquiangulam; pro cujus inventione haud necesse est sequi methodum, qua Euclides descripsit pentagonum ordinatum dependenter à triangulo Isoscele habente utrumque angulorum ad basin, duplum anguli ad verticem; quod, & Tolomeus in Almagesto ex sectione analogica semidiametri, illud idem ordinavit; atque exindè cæteri Autores crediderunt pro polygonis imparium laterum Isoscelia triangula inquiri oportere habentia angulos ad basim multiplices eorum, qui ad vertices sunt angulorum. Hoc enim nullo modo est necessarium, dummodò alia geometrica via id assequatur, quod mirabili facilitate, ac elegantia suppeditabit jam data methodus dividendi angulum planum in plures partes impares inter se

æqua-

æquales, qua divisione habita, facillima est in circulo descriptio heptagoni, nonagoni, aliorumque polygonorum laterum imparium, sicuti fecit Euclides in descriptione pentagoni, ut infra ostendam. Interim incipiamus à descriptione trianguli æquilateri, ut confutemus opinionem Auctoris britannici, cui apertissimè demonstrabimus, trisectionem totius peripheriæ circuli, pendere á trisectione anguli recti; & deindè confutabimus etiam Kepplerum, aliosq; putantes descriptionem geometricam in circulo figurarum laterum imparium, esse omninò impossibilem. Sit igitur.

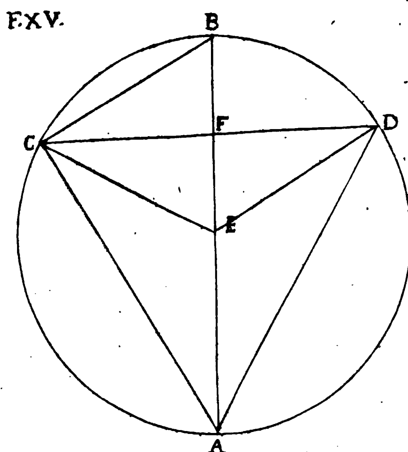


PRO-

PROBL. IV. PROPOS. IV.

TRisecto intra circulum angulo recto, trisecare quoque totam anguli peripheriam.

Figura Decimaquinta,



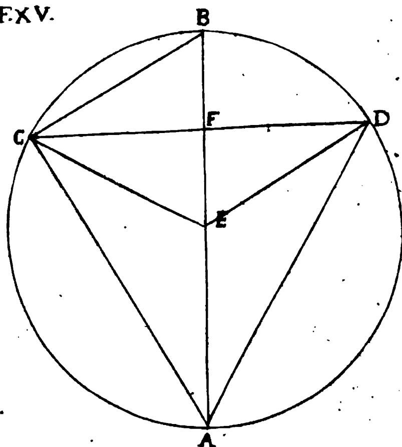
SIt Peripheria circuli trisecanda D A C., ducatur diameter A B., & supra semidiametrum E B. (*Ex pr.* 1. *l.* 1.] fiat triangulum æquilaterum E C B., deindè dividatur bifariam angulus C. recta C D., & jungantur A C. A D. D E. Quia

Quia in triangulo æquilatero E C B. [*Per* 8.*l.*1.) omnes anguli ſunt æquales; quilibet illorum conſtat ex duabus tertiis partibus anguli recti, & quoniam angulus C. diviſus eſt bifariam; tàm angulus B C D., quám E C D. erit tertia pars anguli recti, ergo, & angulus E C A. complens angulum in ſemicirculo rectum A C B., erit pariter tertia pars anguli recti; & idcircò diviſus eſt angulus rectus A C B., in tres partes vel angulos inter ſe æquales, quod erat primo loco probandum. Demonſtro nunc ex triſectione anguli recti pendere triſectionem totius peripheriæ circuli.

Quoniam, duo triangula C E D. C E A. ſunt Iſoſcelia, & probatum eſt tàm angulum E C A., quàm angulum E C D. eſſe tertiam partem anguli recti, cum habeant angulos ad baſes C D. C A. inter ſe æquales (*Ex* 32.*l.*1.), habent etiam, & reliquos ad centrum E. inter ſe æquales. In triangulo B C F. angulus B., ut trianguli æquilateri E B C., continet, ut dictum eſt duas tertias partes anguli recti, angulus C. continet unam tertiam partem anguli recti dum igitur dicti duo anguli ſunt uni recto æquales [*Per* 32.*l.*1.], reliquus angulus F. trianguli B C F. eſt rectus. Recta C D.

in-

Figura Decimaquinta;



intrà triangulum aptata, quia dividitur à diametro A B. ad angulos rectos (*Ex* 3.*l*.3.) dividitur bifariam, & idcircò duo triangula A F C. A F D., quoniam habent latera F C. F D. æqualia, latus F A. commune, & angulos á dictis lateribus contentos æquales, hoc est rectos [*Per* 4. *l*. 1.], habent quoque, & bases æquales; sed dictæ bases C A. D A. sunt etiam bases duorum Isoscelium æqualium laterum C E A. D E A., ergo dicta duo Isoscelia æquantur, & anguli ad centrum E. (*Ex* 8.*l*.1.) oppositi æqualibus basibus C A. D A. sunt inter se æqua-

les, ſed angulus C E A. oſtenſus eſt etiam æqualis angulo C E D., ergo omnes tres anguli C E A. C E D. D E A. ſunt inter ſe æquales, qui cum ſint ad centrum E. [*Per* 26. *l.* 3.] inſiſtunt æqualibus arcubus, eſt igitur peripheria dati circuli D A C. diviſa in tres partes, vel arcus inter ſe æquales, quod eſt propoſitum: Et quia rectæ lineæ D C. D A. A C. ſubtendentes dictos arcus ſunt etiam æquales, [*Ex* 29.*l.*3.] ſicuti ſunt æquales pariter anguli ad circumferentiam D. A. C. à dictis lineis effecti [*Per* 20. *l.* 3.), cum unusquiſque eorum ſit ſemiſſis æqualium angulorum ad centrum E., erit triangulum D A C. æquilaterum, & æquiangulum, quod etiam voluimus. Fallitur igitur autor britannicus aſſerens non poſſe geometricè ſecari tripartitò peripheriam circuli, & per conſequens, non poſſe in ipſo deſcribi triangulum æquilaterum; & tàm malè fallitur in dicta ſua aſſertione, ut ſi verum eſſet, quod ipſè ait, videlicet de biſectione, & quintuſectione peripheriæ, non dari neque unam, neque alteram geometricam, ſequeretur; quod falſa eſſet definitio diametri in ordine XVII., quæ talis eſt. *Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum*

du-

ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat. Similiter si peripheria circuli non posset geometricè quintusecari, sequeretur quod Euclides ad prop. 11. l. 4. non geometricè descripsisset in circulo Pentagonum regulare æqualium laterum. Videat igitur dictus Autor, quot in una periodo est comprehensus absurda.

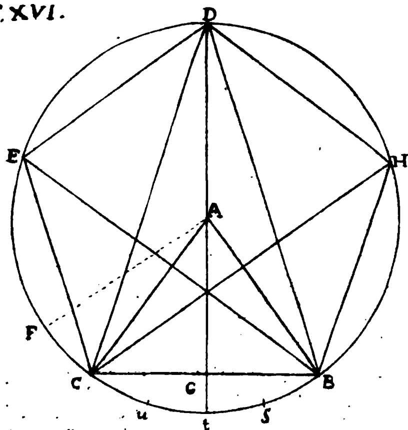
Veniamus nunc ad Kepplerum, qui inter inscibilia posuit descriptionem in circulo cujuscumque figuræ imparium laterum, & præsertim descriptionem heptagoni, & videamus, an pro tali inscriptione necessarium sit sequi methodum ab Euclide datam in inscriptione Pentagoni; videlicet trianguli Isoscelis habentis angulos ad basim multiplices eorum, qui ad verticem sunt angulorum.



POBL. V. PROPOS. V.

DIviſo angulo recto in quinque partes, vel angulos inter ſe æquales, reperire latus Pentagoni circulo inſcribendi.

Figura Decimaſeſta;



FIat angulus rectus B A F., & intervallo ad libitum centro A. ducatur circulus B H E., & diviſo angulo recto in quinque partes æquales, ideſt diviſo arcu, cui

an-

angulus rectus insistit in quinque arcus æquales Bs. st. tu. uC. CF. regulis supra datis, ducatur BC. subtendens 4. ex dictis arcubus: dico rectam BC. esse latus Pentagoni circulo inscribendi.

Quia quadrans BAFt. divisus est in quinque arcus æquales, si ijsdem regulis geometricis dividerentur reliqui tres quadrantes pariter in arcus æquales, videlicet unusquisque eorum in quinque arcus inter se æquales; quorum quatuor essent quinta pars totius circumferentiæ, & per consequens quinque rectæ lineæ subtendentes, unaquæque earum dictos quatuor arcus; essent latera Pentagoni circulo inscripti. Ergo si intervallo rectæ BC. abscindatur tota circuli peripheria, & puncta abscissionis jungantur rectis lineis, dictæ rectæ lineæ sunt latera pentagoni circulo inscripti, quod est propositum. Non est igitur necesse, sequi viam, quam tenuit Euclides, pro inscriptione figurarum imparium laterum intra circulum, ut de se patet.

Si autem vis tenere regulam ab Euclide inventam: á centro A. duc rectam AG., quæ dividat bifariam rectam BC., & protrahe GA. usque ad aliquod punctum D. circumferentiæ, & junge DB. DC. AC.

Denique divide angulum D C B. bifariam recta C H., & similiter bifariam divide angulum D B C. recta B E., & junge C E. D E. D H. H B. dico figuram B H D E C. esse pentagonum regulare circulo inscriptum.

Quia triangulum B A C. ad centrum circuli constat ex quator partibus anguli recti divisi in quinque partes æquales, continet gradus 72., & per consequens [*Per* 20. *l*.3.] angulus D. ad circumferentiam, qui est ejus dimidium, continet gradus 36. Latus B C. intra circulum, quoniam divisum est bifariam à diametro D t. ad punctum G., [*Per* 3.*l*.3.] divisum est ad angulos rectos; ideòque duo triangula D G B. D G C. quia habent latera G B. G C. æqualia, latus G D. commune. & angulos à dictis lateribus contentos æquales, idest rectos (*Ex* 4.*l*.1.), habent etiam & bases D B. D C. inter se æquales; Ideòque triangulum B D C. est Isosceles [*Per* 5. *l*.1.] habens angulos ad basin B C. æquales. Ostensum est angulum D. ad circumferentiam esse graduum 36., & quia omne triangulum habet angulos duobus rectis æquales, [*Ex* 32.*l*.1.] erit quilibet angulus ad basin B C. graduum 72., idest duplus an-

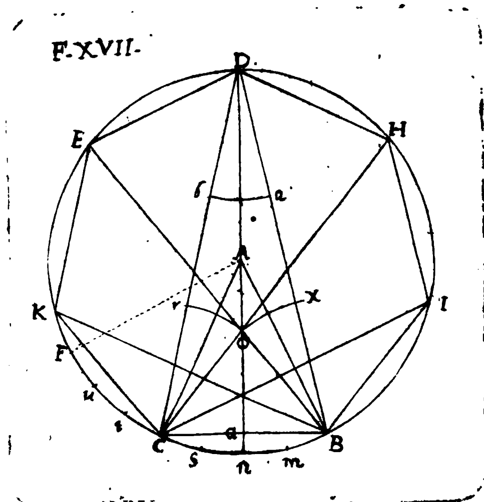
guli

guli ad verticem D. Anguli ad basin B C. divisi sunt bifariam rectis lineis C H. B E., ergo quilibet eorum est graduum 36. hoc est æqualis angulo D. ad circumferentiam; sed æquales anguli ad circumferentiam (*Per* 26.*l*.3.] insistunt æqualibus arcubus, ergo & rectæ lineæ illos subtendentes (*Ex* 28. *l*. 3.) sunt inter se æquales, quæ cum sint latera figuræ B H D E C. circulo inscriptæ, erit dicta figura Pentagonum regulare, habens tàm æqualia latera, quàm angulos æquales, quod volebamus. Et hìc advertendum est, quod non est necessarium constituere priùs triangulum Isosceles extra circulum, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui, ut docuit Euclides prop. 11. lib. 4., ad hoc ut possit circulo inscribi Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum; nam faciliore via hoc fit, diviso priùs angulo recto in quinque partes, vel angulos inter se æquales; sicuti factum est in hac demonstratione.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

DIviso angulo recto in septem partes æquales, reperire latus heptagoni circulo inscribendi.

Figura Decimaseptima.



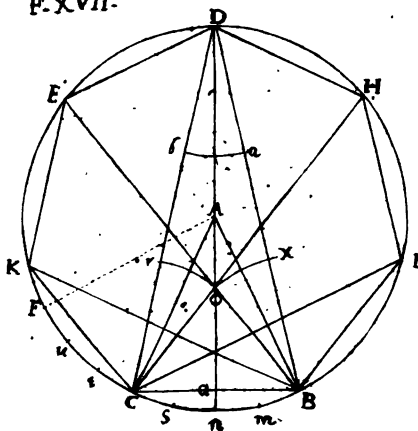
FIat angulus rectus BAF., & capto intervallo ad libitum, centro A. ducatur circulus BHE., & diviso angulo recto BAF. in septem æquales angulos, methodo superiùs data, erit divisus etiam arcus

cus B C F. in ſeptem arcus inter ſe æquales; Ideòque recta B C. ſubtendens quatuor dictorum arcuum erit latus heptagoni.; Nam ſi divideretur quilibet quadrans in ſeptem æquales angulos, divideretur circumferentia quoque in totidem æquales arcus, ideſt in arcus 28., & propterea recta ſubtendens quatuor dictorum arcuum eſt latus heptagoni, nam $\frac{4}{28}$, & ſeptima pars dictorum arcuum, ſunt idem; & idcircò recta ſubtendens quatuor ex dictis arcubus eſt unum ex ſeptem lateribus conſtituentibus polygonum in circulo deſcriptum; Si igitur intervallo B C. abſcindatur tota peripheria circuli, ſecabitur in ſeptem arcus inter ſe æquales, & per conſequens rectæ lineæ ipſos ſubtendentes, erunt ſeptem latera polygoni in circulo deſcripti, ideſt ſeptem heptagoni latera, quod eſt propoſitum.

Si autem in deſcriptione heptagoni vis tenere viam, quam tenuit Euclides in deſcriptione Pentagoni, debes conſtituere triangulum Iſoſceles, cujus quilibet angulus ad baſin ſit triplus reliqui, quod ita fit.

Poſtquam diviſus eſt arcus quadrantis A B C F in ſeptem arcus æquales regulis jam datis, jungatur A C., & à centro A. du-

Figura Decimaseptima.



ducatur recta A n., quæ dividat bifariam BC., & ex parte opposita protrahatur usque ad aliquod punctum D. peripheriæ, & jungantur DC. DB., deindè intervallo ad libitum, ut Da., centro D. ducatur arcus ab., & eodem retento intervallo, centris C. B. ducantur arcus ro. xo., & capto intervallo arcus ab., abscindantur æquales arcus ro. xo., & ab angulis C. B. per punctum o. ducantur rectæ CH. BE., & tàm angulus HCB., quàm angulus EBC. dividatur bifariam rectis CI. BK., & jungantur CK. KE. ED. DH. HI. IB.. Dico, quod tri-

triangulum DBC. ſit Iſoſceles habens angulos ad baſin æquales, & quemlibet illorum triplum reliqui, quodq; polygonum circulo inſcriptum ſit heptagonum æquilaterum, & æquiangulum, quod ita oſtendo.

Quia diameter Dn. dividit ex conſtr. bifariam rectam BC. intra circulum ad punctum G., (*Per* 3.*l*.3.) dividit ad angulos rectos, & idcircò in triangulis DGC. DGB., duo latera GC. GB. ſunt æqualia, latus DG. commune, & anguli à dictis lateribus contenti æquales, hoc eſt recti, ergo (*Per* 4.*l*. 1.) & baſes DC. DB. ſunt æquales, & triangulum BDC. eſt Iſoſceles. Angulus ad centrum BAC., quia inſiſtit quatuor ex ſeptem æqualibus arcubus, quibus omnibus inſiſtit angulus rectus, eſt graduum 51.$\frac{3}{7}$ ergo [*Ex* 20.*l*.3.] angulus BDC. ad circumferentiam dimidium ejus, erit graduum 25.$\frac{5}{7}$; Sed triangulum BDC. eſt Iſoſceles, erit igitur, (*Per* 32.*l*.1.] quilibet angulus ad baſin BC. graduum 77.$\frac{1}{7}$ hoc eſt triplus anguli BDC., nam numerus 25.$\frac{5}{7}$ ter ſumptus efficit numerum 77.$\frac{1}{7}$ Anguli DCH. DBE. ſunt ex conſtructione æquales angulo BDC., & anguli CBE. BCH. diviſi ſunt bifariam. Ergo quilibet an-

angulus ad basin B C.. divisus est in tres partes, vel angulos inter se æquales. Dum igitur omnes anguli ad circumferentiam sunt inter se æquales (*Ex 26. l. 3.*), insistunt æqualibus arcubus, & consequenter [*Per 29. l. 3.*] rectæ lineæ subtendentes dictos arcus, sunt etiam æquales inter se, quæ cum sint latera constituentia polygonum circulo inscriptum, & sint numero septem, erit dictus polygonus heptagonum æquilaterum, sed anguli ejusdem heptagoni KED. EDH., & reliqui sunt etiam æquales, [*Per 27. l. 3.*] cum quilibet eorum insistat quinque ex dictis arcubus æqualibus. Est igitur dictum heptagonum circulo inscriptum æquilaterum, & æquiangulum, quod est propositum.

Eodem modo reperietur pro nonagono triangulum Isosceles, quod habeat quemlibet angulum ad basim quadruplum reliqui, & idem est pro aliis polygonis imparium laterum; pro quibus non sunt divisi anguli recti; neque in novem, undecim, aut plures partes; nam ex præmissa divisione pro pentagono, & heptagono, potest unusquisque ex se dividere iisdem regulis quemcumque angulum in quot voluerit

rit partes, Ecce quanta sit facilitate, quod pro Kepplero ignoratur etiam à mente actu omniscia: sed ut magis convincamus illius falsissimam opinionem, Sit.

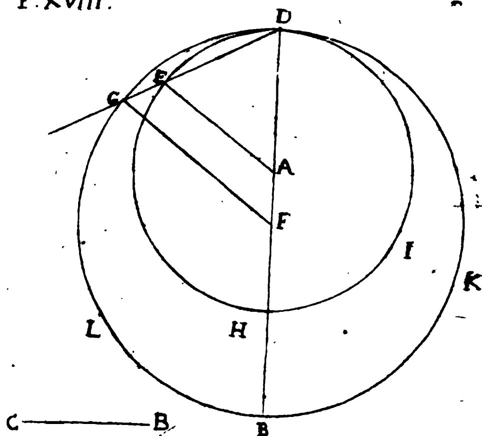


PRO-

PROBLEMA VII.

DAta quacumque recta linea terminata, illam constituere latus Heptagoni.

Figura Decimaoctava.



FIat circulus DKL., & ducatur diamater BD., & chorda DG. latus heptagoni, & BC. ſit data recta linea terminata, quæ vertenda ſit in latus heptagoni. Capiatur intervallum BC., & centro D. abſcindatur æqualis DE.; atque

que à centrò F. ad punctum G. ducatur semidiameter F G. , & á puncto E. ducatur E A. paralella G F. , atque intervallo A D. ducatur circulus D I H. , dico D E. esse latus heptagoni dicto circulo inscribendi.

Quia in triangulis D A E. D F G. bases A E. F B. sunt ex constructione paralellæ , erit (*Per* 4. *l.* 6.), ut D F. ad F G. , ita D A. ad A E. , sed circulus D K L. ductus intervallo F D. transit per punctum G. , ergo circulus D I H. ductus intervallo A D. transire debet per punctum E. Angulus D A E. externus (*Ex* 28. *l.* 1.) æqualis est interno, & opposito angulo DFG. , & quia dicti anguli sunt ad centra circulorum inæqualium, insistunt arcubus inter se similibus; & idcircò erit, ut arcus D G. ad totam peripheriam circuli D K L. , ita arcus D E. ad totam circumferentiam circuli D I H. , nam qualium partium est arcus DG. ad totam suam peripheriam, talium est etiam arcus DE ad suam circumferentiam. Arcus D G. est septima pars suæ circumferentiæ, erit quoque septima pars suæ peripheriæ arcus D E., & per consequens sicut latus D G. est heptagoni circulo D K L. inscribendi ,

ita

ita pariter latus DE. erit latus heptagoni circulo DIH. inſcribendi, quod voluimus. Et hæc dixiſſe ſufficiat de triſectione, quintuſectione, cæteriſque diviſionibus geometricis anguli plani in partes impares, & inter ſe æquales.

Afferam nunc in medium quid me moverit ad inveſtigandum veram, ac geometricam anguli triſectionem, cæteraſque ejuſdem diviſiones, ſicuti ſupra promiſi. Oſtendam igitur, aliquos angulos planos de facto geometricè triſecari; deindè oſtendam pariter ad eorum normam etiam alios, imò omnes triſecari poſſe; non autem contendo, an demonſtrationes factæ pro angulis triſectis ad normam aliorum geometricè triſectorum, ſint, & ipſæ, vel non ſint totaliter geometricæ; ſed do illas tales, quales ſunt, ut ſtudioſi exerceant circa illas eorum ingenium, & novas, atque meliores excogitent demonſtrationes. Geometricas totaliter demoſtrationes, jam in præmiſſis anguli triſectionibus indubitanter habemus.

PRO-

PROBLEMA.

DIviso primùm trifariam angulo acuto; ad ipsius normam dividere quoq; omnes alios acutos angulos.

SUpra rectam I D. ducatur perpendicularis A I. , & capto intervallo ad libitum, ut I A. centro I. ducatur arcus APB., & eodem retento intervallo, centro A. abscindatur arcus A P., & à puncto A. per punctum P. ducatur recta A C. Denique capiatur intervallum A B. , & abscindatur æqualis B D. & jungantur A D. A B. I P.

Dico, quod in dicta figura habemus trisectum angulum rectum I. angulum semirectum I A B. , & angulum viginti duorum graduum cum dimidio B A D. , & præter istos multi alii geometricè dividi possunt; & est id, quod à principio dixi; videlicèt si dividitur angulus rectus, & aliquis angulus acutus circino, & regula, cur non omnes geometricè dividi possunt? & ex hoc ipso manifestè dignoscebatur, falsam esse assertionem impossibilitatis trise-

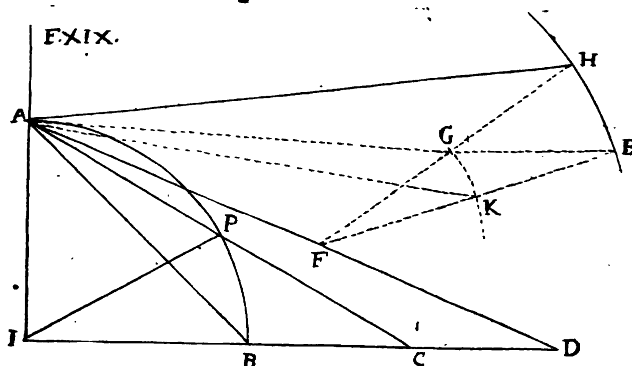
ctionis anguli plani circino, & regula. Ostendo nunc dictos tres angulos trifariam secari.

Quia triangulum IAP. est æquilaterum ex constr. (*Per* 32. *l.* 1.) angulus AIP. constat duabus tertiis partibus anguli recti, idest gradibus 60., sicuti, & cæteri anguli ejusdem trianguli; sed angulus rectus AIB. est graduum 90., ergo angulus BIP. est graduum 30. Si igitur angulus AIP. graduum 60. dividatur bifariam, erit quilibet ex tribus angulis graduum 30., ideòque inter se æquales, & cum omnes dicti tres anguli dividant totum angulum rectum I., Erit ipse divisus trifariam, quod est propositum.

Similiter quoniam triangulum IAC. habet angulum I. rectum, angulum A. graduum 60., habet, & reliquum C. (*Ex* 32.*l.*1.) graduum 30., dividit ergo angulus ICA. etiam trifariam angulum rectum I.. Angulus semirectus IBA. graduum 45. externus triangulo ABC., est æqualis duobus angulis internis, & oppositis C., & CAB. ex eadem 32. l. 1., dum igitur angulus C. ostensus est graduum 30., erit CAB. graduum 15., hoc est tertia pars anguli semirecti IAB., dividit igitur angulus CAB.

tri-

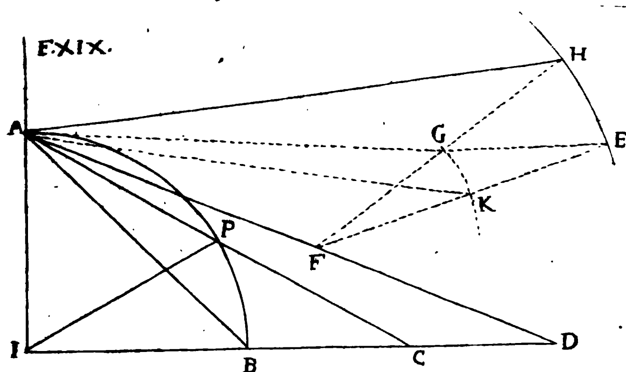
Figura Decimanona.



trifariam ſemirectum angulum IAB., quod erat ſecundo loco probandum.

Demonſtro nunc, etiam angulum BAD. trifariam ſecari ab angulo CAD., quia triangulum ABD. eſt per conſtructionem Iſoſceles, (*Ex* 5. *l.* 1.] habet angulos ad baſin AD. inter ſe æquales; ſed angulus ſemirectus graduum 45. IBA., ut externus, Per 32.l.1. æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis angulis D., & DAB., ergo quilibet eorum eſt graduum 22. cum dimidio; ſed etiam angulus 30. graduum BCA. ut externus, æqualis eſt duobus angulis internis, & oppoſitis D., & DAC., dum igitur angulus D. oſtenſus eſt graduum 22. cum dimidio, erit angulus DAC. gra-

Figura Decimanona.



duum 7. cum dimidio, ideſt tertia pars totius anguli D A B: Diviſo igitur bifariam angulo B A C., erit totus angulus B A D. diviſus in tres partes, vel angulos inter ſe æquales, quod erat ultimo loco probandum.

Cum demonſtratum ſit, angulum rectum, & aliquos angulos acutos (quorum plures triſecari poſſunt) dividi in tres partes æquales; demonſtrandum eſt, quomodo ad normam anguli acuti triſecti, dividuntur etiam cæteri anguli acuti à principio dati.

Sit datus angulus acutus triſecandus, angulus F A H., producantur latera A F. A H. indefinitè, & capto intervallo lateris

A B.

AB.; vel BD. anguli trisecti BAD., abscindatur æqualis AF., & eodem retento intervallo, centro F. secetur recta AH. ad aliquod punctum H., & jungatur FH. Denique capiatur intervallum BC., & abscindatur æqualis FG., & ab angulo A. ad punctum G. ducatur recta AG.

Quia in duobus triangulis ABD. AFH. ex constr. Isosceliis, & in proportione æqualitatis laterum inter se; est, ut latus AB. ad latus BD., ita latus AF. ad latus FH.; & est etiam, ut angulus BAD. ad angulum D., ita angulus FAH. ad angulum H. (nam tàm anguli BAD., & D. sunt inter se æquales, quàm anguli FAH., & H.) ergo ex paritate rationis, quia similiter ex constr., ut est latus AB. ad latus BC. ita latus AF. ad latus FG., erit quoque, ut angulus C. ad angulum BAC., ita angulus G. ad angulum FAG., & eadem rationis paritate, quia est etiam ex constr. ut latus BD. ad latus DC., ita latus FH. ad latus HG., erit etiam, ut angulus BAD. ad angulum CAD., ita angulus FAH. ad angulum GAH., sed angulus BAD. ostensus est triplus anguli CAD., ergo, & angulus FAH. triplus est anguli GAH., diviso igitur bifariam angulo FAG., erit

totus angulus FAH. ſectus in tres partes æquales, quod voluimus.

Animadvertendum tamen eſt, quod angulus, qui dividi debet in tres partes æquales, debet eſſe aut æqualis, aut minor tertia parte anguli recti; Et ſi angulus datus eſt major dicta tertia parte anguli recti, dividatur toties biſariam, donec una ex dictis partibus æqualis ſit, vel minor dicta tertia parte anguli recti; nam ex dicta triſectione, triſecabitur quoque totus angulus datus, uti patet. Non eſt autem neceſſe, ut triangula habeant omnia quatuor latera inter ſe æqualia, ſed ſufficit ſolùm, ut ſint Iſoſcelia, & habeant latera ſubtendentia tàm angulum diviſum, quàm dividendum eadem proportione diviſa.

Si vis dividere tripartitò angulum FAG., ſumma fit facilitate. Capiatur intervallum FH., & centro F. ducatur arcus HE., & protrahatur AG. uſque ad aliquod punctum E. dicti arcus, jungaturque FE., denique intervallo FG. ducatur arcus GK., & à puncto K. interſecationis ad angulum A. ducatur recta KA., dico, quod ſicuti recta GA. dividit triſariam angulum HAF., ita ad illius normam, recta KA. dividit tri-

trifariam totum angulum E A F. rationes ſunt eædem, quæ allatæ ſunt pro diviſione anguli F A H.

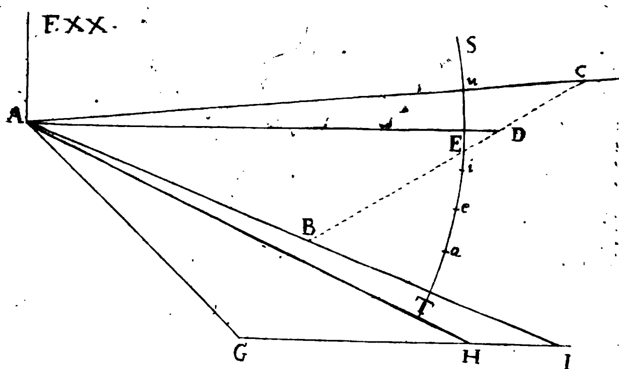
Hac methodo dividi poteſt quicumque angulus acutus æqualis, vel minor tertia parte anguli recti in quot partes impares, & inter ſe æquales unuſquiſque voluerit.



DE ALIO MODO DIVIDENDI ANGULUM In quot partes impares, ET INTER SE ÆQUALES *Unusquisque voluerit.*

SI percupias dividere acutum angulum GAI. in quinque partes æquales, capto ad libitum intervallo AT. duc arcum

Figura Vigesima.



TS., atque intervallo ad libitum dividatur successivè dictus arcus in quinque partes

tes æquales Ta. ae., & reliquas, ita tamen, ut dictæ quinque partes sint intra angulum æqualem, vel minorem tertia parte anguli recti, prout dictum est. Deindè à puncto A. per punctum u. ducatur indefinitè recta AC.; & intervallo ad libitum AB., centro B. secetur AC. ad aliquod punctum C., & jungatur BC; atque ab angulo A. per punctum E. ducatur recta AD., erit angulus CAD. ex constr. qninta pars totius anguli BAC.

In dato angulo acuto GAI. protrahantur ejus latera indefinitè, & capto intervallo AB., centro A abscindatur æqualis AG., & eodem retento intervallo, centro G. secetur recta AI. ad aliquod punctum I., & jungatur GI. Deindè capto intervallo BD. abscindatur æqualis GH., & jungatur HA., dico angulum GAI. divisum esse in quinque partes æquales ad normam anguli BAC., nam sicuti recta DA. in angulo BAC aufert quintam totius anguli partem; ita in angulo GAI. recta HA. demit pariter quintam totius anguli partem.

Argumenta sunt omninò eadem, quæ facta sunt pro acuti anguli trisectione; ideòque non sunt inutiliter repetenda.

Di-

Divisio autem anguli acuti in septem, novem, undecim, cæterasque partes impares, & inter se æquales, fit eodem modo ad formam prius divisi anguli acuti, in quinque partes, vel angulos inter se æquales. Et hæc pro impossibili asserta ab aliquibus trisectione, quintusectione &c. anguli plani circino, & regula dicta sufficiant &c.

Una est difficultas, quam alicui videri posset pati hanc ultimam divisionem anguli acuti in tres, quinque, vel plures partes inter se æquales; quam divisionem non attuli (ut iterum aio) tamquam omni certitudine demonstratam, sed solùm, ut ansam aliis præberem investigandi novas demonstrationes ad publicam utilitatem, cum aliàs mihi abundè sufficiant demonstrationes jam superiùs allatæ pro trisectione, quintusectione, cæterisque divisionibus anguli plani, quas geometricas esse, nemo est, qui in dubium revocare possit.

Difficultas igitur esse potest ista, videlicet, quod licet in lateribus triangulorum servetur proportio æqualitatis; dum triangula debent esse Isoscelia, sive habeant omnia quatuor latera inter se æqualia, uti factum est in divisione jam facta; sive duo tan-

tantùm, & latera subtendentia angulum dividendum sint proportionaliter divisa per pr. 10. l. 6., nihilominùs si angulus trisecandus sit major tertia parte anguli recti, idest superet 30. gradus, licet fiant eadem argumenta, attamen angulus non tri. secatur; ex quo apparet, quod talis divisio anguli non sit geometrica, dum est incerta, & per consequens falsa. Sed hæc illatio, quæ fit ab angulo excedente tertiam partem anguli recti ad incertitudinem & falsitatem demonstrationis, est omninò extranea, & impertinens ad divisionem anguli, de qua agitur. Nam potiùs inferri debet, quod duæ illæ qualitates requiruntur, ut sit geometrica, & certa; videlicet, ut latera sint inter se proportionalia proportione æqualitatis, & angulus non excedat tertiam partem anguli recti. Cur autem hoc eveniat solùm in dictis angulis, & triangulis Isosceliis habentibus latera subtendentia angulos dividendos proportionaliter divisa? nihil aliud dici potest, nisi hoc esse quid peculiare, & proprium talium laterum, & angulorum, ut docet experientia; neque est quid novum, ut non de omnibus formalis ratio reddi possit, dum solius Dei est omnia scire.

Mul-

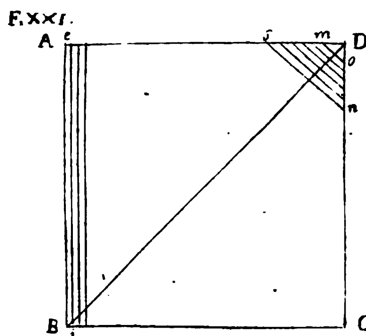
Multæ ſunt quæſtiones, quæ licet longo tempore volutatæ, nihilominùs adhuc incertæ remanent, præſertim illa de quantitate continua, an conſtet ex partibus, vel ex punctis? an ex partibus finitis, vel infinitis? &c. Et quod mirum, eſt omnes mathematici ſupponut, ut quid certum, quod quantitas continua componatur ex punctis indiviſibilibus, prout manifeſtè apparet ex definitione puncti, & lineæ rectæ, & licet id non intelligant neque de punctis, neque de lineis exiſtentibus in materia quantitativa, ſed ſolùm de punctis mente conceptis, quæ nullam patiuntur diviſionem; ſicuti eſt numerus unus, aut inſtans; nihilominùs etiam puncta, ita ſolùm mente concepta debent per ipſos componere quantitatem continuam intellectualem, diviſioni ſubjectam, & dividendam per intellectum; ſicuti materialis quantitas dividitur in partes materiales. Iſta igitur quantitas continua, ex punctis compoſita, licet per intellectum concepta, repugnat principiis ejuſdem geometriæ etiam per intellectum conceptæ, ut mox oſtendam demonſtratione ineluctabili geometrica. Peto nunc cur in ſcientia tàm vera, & tàm certa admittunt Mathematici id, quod

quod ipsius geometriæ principiis convincitur esse falsum? Quod falsum sit quantitatem continuam constare ex punctis indivisibilibus, ita matheseos principiis demonstro.

Fiat quadratum AC, & ducatur diameter BD., ponamus, quodlibet latus quadrati constare ex mille punctis, vel pluribus, aut minoribus, nihil interest; Deindè à latere AD. ad latus BC. duco rectam e i. prope latus AB., & sic successivè à quolibet puncto lateris AD. ad quodlibet punctum correspondens lateris BC. duco lineas, donec compleam totam superficiem ABCD.; certum est, quod dictæ mille rectæ lineæ transeunt per diametrum BD, sive quadratum concipiatur solo intellectu, sive sit in materia quanta, prout in subjecta figura, & quoniam constant ex punctis non habentibus partem ullam, necessariò dictæ mille lineæ ductæ tangunt diametrum, aut in uno, aut in duobus punctis; & quia tangunt totam diametrum, si tangunt illam in uno solo puncto, constabit etiam illa mille punctis, ideòque erit æqualis cuilibet lateri quadrati, & per consequens diameter, & latus quadrati erunt lineæ longitudine commensurabiles, quod est contra ultimam prop. *l.* 10. Euclidis. Si autem

tan-

Figura Vigesimaprima.



tangunt diametrum in duobus punctis, erit diameter dupla lateris sui quadrati, quod pariter est contra dictam propositionem 117. Euclidis *l.* 10., & etiam contra *pr.* 20. *l.* 1., quoniam duo latera trianguli BAD. non essent tertio latere majora; Sed si quantitas continua constaret ex punctis, sequeretur hoc intolerabile absurdum, quod diameter esset dupla, & subdupla simul sui ipsius, ad cujus rei evidentiam in eodem quadrato ducantur rectæ lineæ ex transverso, hoc est à latere DA. ad latus DC., ut est recta mo., & ita ducantur donec compleatur tota superficies quadrati. Rectæ lineæ ita ductæ sunt bis mille, ut est manifestum, ergo tangunt diametrum in bis

mil-

mille punctis, & in mille tantùm punctis tangunt illam rectæ lineæ ductæ à latere A D. ad latus B C., ſicuti dictum eſt; ergo diameter B D. eſt dupla, & ſubdupla ſimul ſui ipſius, quod eſſe nullo modo poteſt; & per conſequens neque eſſe poteſt, quod quantitas continua, etiam ſola mente concepta, conſtet ex punctis indiviſibilibus, ut Mathematici volunt; ſed cur hoc ipſi admittant, vix ulla ratio reddi poteſt?

Unde autem oriatur tàm notabilis differentia in diametro quadrati B D., ut modò tangatur in bis mille punctis, modò in mille à lineis efficientibus eamdem quadrati ſuperficiem; vera ratio eſt, quod per lineas ductas in directum à latere A D. ad latus B C., diameter ſecatur ad angulos acutos; & per lineas ductas ex transverſo à latere D A. ad latus D C., ſecatur ad angulos rectos; dum igitur angulus acutus occupat majorem quantitatem illa, quam occupat angulus rectus, non poteſt quantitas continua conſtare ex punctis, ſed neceſſariò conſtat ex partibus; nam ſi angulus rectus fit minori quantitate, qua fit angulus acutus, neceſſe eſt, ut angulus acutus occupet majorem ipſius quantitatis partem; Ideóque quantitas conſtat ex partibus.

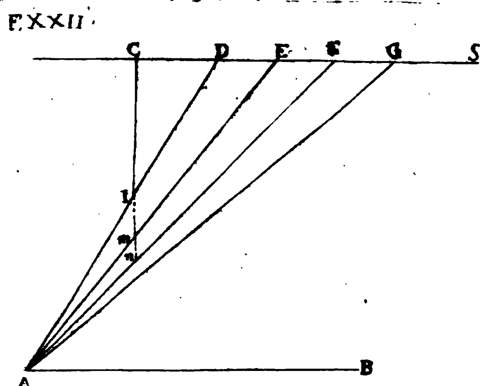
At

At ex hoc, quod quantitas continua constet ex partibus, oritur alia quæstio. Utrum constet ex partibus finitis, vel infinitis, & hujus occasione iterum contra eos, qui judicant impossibilem anguli trisectionem, & cætera hujus libelli problemata, ostendam quam verum sit illud Archimedis effatum: *Quod multa in geometria visa sunt impossibilia, quæ postea suam capiunt perfectionem*. Nam cui quæso non videbitur impossibile, quod data recta linea ad alteram perpendiculari aliqualiter distante á recta ei supposita, possit dicta perpendicularis semper in infinitum augeri versùs rectam lineam illi suppositam absque eo, quod suppositam lineam umquam contingat, licet aucta innumerabilibus partibus; hoc enim quis sanæ mentis primo intuitu credere poterit, & non judicaverit id esse omninò impossibile; Et nihilominùs geometricè demonstratur hocita esse.

Ducatur recta AB., & super ipsam ducatur perpendicularis CI., quæ suo extremo J. distet à supposita recta AB., & à puncto C. perpendicularis CI., ducatur CS. paralella AB., quæ sit extensionis infinitæ; deindè à puncto A. per punctum I. extremum CI., duca-

tur

Figura Vigesimasecunda.



catur recta AD.; & ab eodem puncto A. ad punctum E. ducatur recta AE., & protrahatur perpendicularis CI. usque ad aliquod punctum m. rectæ AE., & sic erit aucta perpendicularis CI. tota quantitate intercepta à triangulo DAE, ideſt tota parte Im. Iterum à puncto A. ad punctum F. ducatur recta AF., & protrahatur perpendicularis CI. usq; ad rectam AF., erit iterum aucta tota longitudine mx., & ita si semper à puncto A. ad paralellam CS. infinitæ extensionis ducantur rectæ lineæ in infinitum, cum nulla ex dictis lineis ductis à puncto A. ad paralellam CS. congruere possit cum recta AB., sed debeat

necessariò cum ipsa angulum constituere ; [nam recta linea incidens in paralellas efficit angulos alternos inter se æquales ex pr.29. l. 1.) sequitur, quod licet innumerabiles ducantur lineæ in dictas paralellas, dum semper efficiant, & relinquant angulum, semper quoque perpendicularis CI. augeri possit in infinitum toto spatio angulorum; sed anguli multiplicari possunt in infinitum, ergo, & perpendicularis CI. augeri etiam potest in infinitum, absque eò, quod umquam contingat rectam lineam illi suppositam, quod est propositum. Vide igitur quomodo illa, quæ primo aspectu impossibilia videntur, talia non sunt.

Ex hac demonstratione evidenter apparet, quantitatem continuam constare ex partibus proportionalibus divisibilibus in infinitum; nam si perpendicularis CI. producta sit usque ad rectam A B. illi suppositam, & incipias illam dividere á puncto I., aut á quocumque alio puncto aliqualiter distante à recta AB., numquam illam totam dividere poteris, quantumvis in infinitum multiplices divisiones, ut patet ex demonstratione jam facta.

Si igitur â quantitate continua detrahi possunt in infinitum partes proportionales, æquum est querere, an ipsa constet ex partibus infinitis? cum ab ea postquam millies dem-

ptum

ptum eſt, ſemper in infinitum ulterius demi poſſit, ideòque videtur, ut conſtare debeat partibus infinitis, nam ſi infinitis partibus non conſtaret, neque in infinitum ab ipſa detrahi poſſent tales partes; circumſcriberetur ejus extenſio determinato numero partium, quo completo, non eſſet ampliùs diviſibilis, & idcircò neque eſſet diviſibilis in infinitum. Nec ullius ponderis eſt reſponſio, quam aliqui dant, diſtinguendo partes æquales à partibus proportionalibus, & ut effugiant extenſionem infinitam, concedunt conſtare quantitatem continuam partibus infinitis, ſi ab ipſa poſſunt ſemper demi in infinitum partes æquales; at negant ſi demi tantùm poſſunt partes proportionales: Hæc reſponſio primo loco eſt falſa, circa datam diſtinctionem lineæ infinitæ extenſionis, ut ſit illa, à qua in infinitum detrahi poſſunt partes æquales, ſine ulla alia additione, ut ſtatim oſtendam.

Secundo loco nullius eſt roboris, ut dictum eſt; nam cum omne totum conſtet ex illis partibus, in quas reſolvitur, vel poteſt reſolvi; ſequitur quod ſi recta linea dividi poteſt in infinitum in partes proportionales, conſtet infinitis partibus proportionalibus; aliás ſi poſt diviſionem innumerabilium partium proportionalium ampliùs dividi non

 poſ-

possset, neque dividi in infinitum posset in dictas partes proportionales. Si igitur post quamcumque multiplicatam divisionem partium, adhùc est in infinitum divisibilis, manifestum est constare ex partibus infinitis, licet proportionalibus, sed partes quantumvis proportionales faciunt extensionem, ergo si dictæ partes sunt infinitæ, etiam extensio erit infinita: recta autem linea terminata potest dividi in infinitum in partes proportionales, sicuti jam est demonstratum; constat igitur ex partibus infinitis proportionalibus, & per consequens est etiam infinitæ extensionis, quod implicat contradictionem, ut sit terminata, & sit extensionis infinitæ.

Addo nunc, quod falsa sit responsio supra data de partibus æqualibus utcumque, & de partibus proportionalibus. Partes proportionales in ordine ad quantitatem, & ejus divisionem, accipiuntur hìc illæ partes, quæ divisione successiva semper decrescunt, & fiunt minores; sed etiam in partibus ita proportionaliter divisis, reperitur æqualitas partium ablatarum; quia si supponamus rectam lineam divisam esse in mille partes proportionales, omnes partes antecedentes partem millesimam, idest ultimo loco divisam; uti majores illa millesima, continent partem æqualem di-

dictæ millesimæ, & etiam excessum supra æqualem partem, quod manifestè apparet in numeris 8. 6. 4. 2.: in tribus antecedentibus numeris 8. 6. 4. continetur numerus binarius, idest ultimus, & insuper excessus sex numerorum pro numero octavo, quatuor numerorum pro sexto, & duorum numerorum pro quarto numero. Si igitur à nongentis nonaginta novem partibus antecedentibus partem millesimam, demantur earum excessus, omnes dictæ mille partes erunt inter se æquales, & hoc verificatur de quacumque multiplici partitione jam facta in partes, ut ita dicam inumerabiles; nam dempto excessu in omnibus antecedentibus, & relicta illis parte tantummodò ultimæ divisæ æquali, erit quantitas divisa in partes æquales, & hoc fieri potest in infinitum, ergo erit extensionis infinitæ; neque excessus in antecedentibus potest minuere extensionem, imò necessariò auget illam. Quomodo igitur quantitas terminata potest esse extensionis infinitæ, cum sit manifestissima contradictio? & nihilominùs hoc orire-tur absurdum, si verum esset, quod illa quantitas continua est infinitæ extensionis, à qua detrahi possunt in infinitum partes æquales; nam, ut visum est á quantitate continua terminata semper detrahi possunt partes æquales,

& tamen non eſt , neque eſſe poteſt infinitæ extenſionis .

Ad hoc igitur , ut quantitas continua ſit infinitæ extenſionis , neceſſe eſt , ut ab ipſa ſemper detrahi poſſint in infinitum partes æquales , quamvis maximas , ita ut non ſolùm poſſint ab illa detrahi partes æquales ſemipalmares , palmares , bipalmares &c. ſed etiam partes æquales quocumque modo majores: vel eſt illa, à qua ſemper detrahi poſſunt partes in infinitum primæ parti demptæ æquales . In tali caſu quantitas continua infinitæ extenſionis , non poteſt convenire cum quantitate continua diviſibili tantùm in partes proportionales , uti eſt quantitas terminata .

Hæc autem diſtinctio data , juvat ſolùm ad diſcernendum qualis debeat eſſe quantitas infinitæ extenſionis , ut diſtinguatur à quantitate terminata , ſed non aufert difficultatem propoſitam . Videlicet , quonam modo quantitas continua terminata conſtet ex partibus proportionalibus infinitis ſi poteſt in infinitum dividi in dictas partes ; & eædem partes non faciant illam infinitæ extenſionis , dum pars addita parti ſemper facit extenſionem ? Multa ſunt igitur , de quibus , ut di-ctum eſt , ratio reddi non poteſt , & quæ r -

bi:

bis ignota ſunt, licet cognoſcamus illa habere aliquas proprietates, vel qualitates, quas non habent alia etiam ejuſdem generis; & tamen cur potiùs iſta, quam illa tales habeant affectiones, nos penitùs ignoramus? Et hæc dixiſſe ſufficiat pro affectione, qualitate, vel proprietate anguli acuti non excedentis tertiam partem anguli recti: de quo iterum in fine inſtituendus eſt ſermo.



DE CIRCULI
QUADRATURA
AB EODEM AUTORE
INVENTA.



NIHIL EST OPERTUM,
QUOD NON REVELABITUR.
ET OCCULTUM,
QUOD NON SCIETUR.

Matth. c. 10. 28.



AUTORES,

QUI CIRCULI QUADRATURAM PERQUISIERE.

Cum agendum sit de Circuli Quadratura, operæpretium duxi, præmittere nomina Autorum, qui ipsam invenire tentarunt, sed casso conatu, relati à Gerardo Vossio tom. 3. lib. 3. de natura artium, sive de Mathesi cap. 16. §. 17. Ubi ita ait. *Quæstio de quadratura circuli, quæ tot jam olim præclara exercuit ingenia. Uti Pythagoræ, Platonis, Hippocratis Chii, Dinostrati, Menechmi, Cononis Hamæi, Euclidis, Antiphoris, Brisonis; Hipparchi, Archimedis, Tolemei, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Philonis Gaditani, Spori, Pappi Alexandrini, Boetii, Hermanni Contracti, aliorumque Veterum. Nec minùs superiori seculo, & nostro agitata est à Nicolao Cusano, Joanne Regiomontano, Orontio Delphinate, Francisco Vieta, Josepho Scaligero, Rudolfo de Coln, Adriano Romano, Joanne Alfonso Molinensi, VVillebrardo, Snellio, Henrigo Brigio Anglo, Christiano Severini Longomontano, Joanne Pellio Cambrobritanno, Gre-*

Gregorio à S. Vincentio, aliisque summi ingenii Viris, ut de Arabibus taceam. Num quæstionis subtilitatem, an ingenii humani imbecillitatem in causa esse dicemus, quod seculis tot fuerit desudatum in nodo solvendo, qui adhuc sit involutus? Non illa spiralis ratio Magni Archimedis, non illa Quadratrix Pappi suffecere; prætulere hi lucem non exiguàm: Nec leve fuit, quod posteriores addiderunt; sed sic quoque ea quæstio parte sua mansit tenebris obsepta. Nimirum longè à carceribus est procursum, nec dum tamen ad metam est perventum. Hæc Vossius.



PRO-



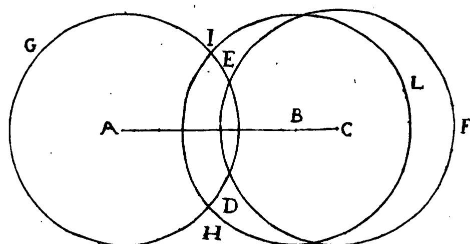
PROBL. I. PROPOS. I.

ÆQualium Circulorum intersecationes, eò sunt minores, quò eorum centra magis inter se distant, & eò majores, quò eadem centra propinquiora sunt inter se.

DUcatur recta AC., & in ipsa capiatur aliquod punctum B., & centris A.C. intervallo medietate lineæ AC. maiore ducantur duo circuli DEG. DEF., & eodem retento intervallo, centro B. ducatur Circulus HIL.

Quia

Figura Vigesimatertia.



Quia recta A B. ex constr. pars est rectæ A C.; habet extrema A. B. propinquiora inter se, extremis A. C.; nam extrema A. B. distant inter se toto intervallo A B., sed extrema A. C. non solùm inter se distant toto intervallo A B., verùm etiam intervallo B C. Extrema igitur A. C. magis inter se distant, quam extrema A. B.: à circulis habentibus centra A. C. inter se remotiora, fit intersecatio D E., & à circulis habentibus centra propinquiora A. B., fit intersecatio HI., sed intersecatio D E., uti pars intersecationis HI,. [*Ex ax.9.*] minor est ipsa. Ergo æqualium circulorum intersecationes &c., quod faciendum, & demonstrandum erat.

PRO-

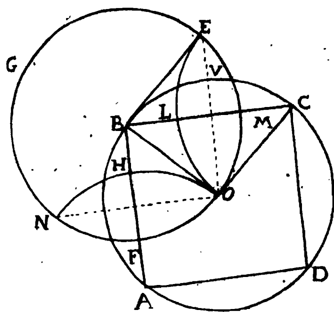
PROBL. II. PROPOS. II.

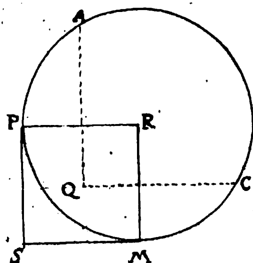
SI quatuor æquales circuli ducantur ab angulis duorum quadratorum, quorum unum ſit illud inſcriptum circulis, & ſit duplum alterius; ſintque utraque diviſa in quatuor quadrata. Interſecationes quas faciunt circa dicta quatuor quadrata circuli ducti ab angulis majoris quadrati, duplæ ſunt pro quolibet circulo unius portionis quadrati inſcripti. Et interſecationes, quas faciunt circa ſua quatuor quadrata circuli ducti ab angulis quadrati ſubdupli, ſunt quadruplæ pro quolibet circulo, unius portionis inſcripti quadrati.

Ha-

Figura Vigesimaquarta.

F. XXIV.





Habeat Circulus ABCD. quadratum inſcriptum BD.; quod duplum ſit quadrati RS., ita ut latus AB. quadrati inſcripti, æquale ſit diagonali PM. Deinde capto intervallo ſemidiametri OB., vel OD. ab angulis quadrati inſcripti ducantur quatuor circuli, ſed non integri, ut evitetur confuſio arcuum, ideſt circulus OEG. OLE. OHN., & reliquus, & pariter ab angulis quadrati ſubdupli RS. eodem intervallo ducatur Circulus APMC., nam reliqui non ſunt neceſſarii.

Quia interſecationes, quas faciunt circuli

culi ducti ab angulis majoris quadrati B D. sunt O M E. O F N., & latera quadrati B O. unius ex quatuor quadratis producta usque ad puncta E., & M. intersecationum æqualia sunt lateribus quadrati circulo inscripti; sequitur, ut portiones OME. BVC. sint inter se æquales, & idem est de portione OFN. ac de reliquis.

Quod lineæ O E. B C. sint æquales, ita probatur. A' centro B. ad punctum E. intersecationis ducatur recta B E., quia (*Per coroll.* 2. *prop.* 4. *lib.* 2.) diagonalis B O. quadrati B O., dividit rectos angulos B. O. bifariam. In triangulis Isoscelibus BOC. OBE. cum anguli ad bases B C. O E. sint semirecti, & æquales (*Ex* 32. *l.* 1.) erunt reliqui ad vertices O. B. recti, ideòque (per quartam primi] bases BC. E O. sunt inter se æquales, quæ in circulis æqualibus [*Per* 28. *l.* 3.) auferunt arcus æquales, & propterea portiones B V C. O M E. sunt inter se æquales; sed circa quadratum B O. est etiam portio OFN., quam facit circulus OFN. sua intersecatione. Ergo intersecatio circuli O E G. circa quadratum B O. dupla est unius portionis B V C. quadrati inscripti, & idem est de reliquis. Quod erat primo loco probandum.

Probatur nunc; quod interſecationes, quas faciunt circa quatuor quadrata minora iidem circuli ducti ab angulis quadrati ſubdupli R S., ſint duplæ interſecationum, quas faciunt circa quatuor quadrata majora quadrati A C., & per conſequens quadruplæ unius portionis quadrati inſcripti; nam qualium partium eſt quadratum B O. ad quadratum B D., talium partium eſt quadratum R Q. ad quadratum R S.

Quoniam Quadratum A C. habet ex conſtructione proportionem duplam ad quadratum R S., eamdem proportionem habent inter ſe diſtantiæ angulorum utriuſque; dum anguli ſunt extrema puncta linearum efficientia earum longitudinem; ideò enim una recta linea major eſt altera, quia extrema puncta unius magis inter ſe diſtant, quàm extrema puncta alterius; ſed anguli, qui ſunt extrema puncta utriuſque quadrati, ſunt ex hypotheſi circulorum centra. Ergo ut eſt proportio quadrati A C. ad quadratum R S., eſt etiam proportio diſtantiæ, quam habent centra circulorum unius quadrati ad centra circulorum alterius; ſed interſecationes circulorum, (*Ex prop.* 1.) eò ſunt majores, quò centra propinquiora ſunt inter ſe, & eò minores, quò eadem centra

tra

tra magis inter ſe diſtant. Ergo ſi diſtantiæ centrorum, quas habent circuli quadrati R S. ſunt in ratione ſubdupla ad diſtantias centrorum, quas habent circuli quadrati A C., erunt interſecationes circulorum ductorum ab angulis quadrati R S. circa ſua quadrata minora, duplæ interſecationum circulorum ductorum ab angulis quadrati A C. circa ſua minora quadrata. Interſecationes circa minora quadrata circulorum habentium centra in angulis quadrati A C.; oſtenſæ ſunt duplæ unius portionis B V C. quadrati inſcripti. Ergo interſecationes circa quadrata minora circulorum habentium centra in angulis quadrati R S., erunt quadruplæ dictæ portionis B V C., & per conſequens tota quantitas Q A P M C. erit æqualis quatuor portionibus, quas idem circulus facit cum lateribus ſui quadrati inſcripti. Si igitur quatuor æquales circuli &c. quod faciendum, ac demonſtrandum erat.

Sed ut quaſi ſenſui pateat veritas prædictarum interſecationum, quas faciunt circuli circa minora quadrata ducti ab angulis quadrati ſubdupli R S., fiat Schema omninò ſimile antecedenti figuræ, & ductis ab angulis quadrati R S. duobus circulis P G C M. P E V M., producatur indefinitè latus S P.,

 & ca-

Figura Vigesimaquinta.

F.XXV.

& capiatur intervallum diagonalis PM.; & centro P. abſcindatur æqualis PG. : deindè capto intervallo ſemidiametri unius circuli, (nam omnes ſunt æquales] centro P., & G. ducantur arcus verſus K., & ad interſecationem, quam faciunt ad aliquod punctum K., ducatur GK., & facto centro ad punctum K. eodem intervallo ducatur arcus PG., qui tranſire debet per duo puncta P. G., ut patet; jungatur PG., & per centrum Q. ducatur eA. paralella SK.

Quia PG. ex conſtr. æqualis eſt PM., & PM. facta eſt æqualis lateri quadrati in

inſcripti, ſequitur [*Ex pr.* 28. *l.* 3.], quod in circulis æqualibus auferant arcus æquales, & quod portiones circulorum æquales ſint inter ſe; ideòque duæ portiones PG., & duæ PM. æquales ſunt quatuor portionibus, quas facit unuſquiſque circulus cum lateribus quadrati inſcripti. Recta eA., quoniam dividit bifariam diagonales PM. PG. dividit quoque bifariam [*Ex Schol. pr.* 34. *l.* 1.] quatuor portiones PM. PG., & idcircò earum ſemiſſes zPA. iPe. æquales ſunt duabus portionibus, quas facit circulus cum lateribus quadrati inſcripti: tota igitur quantitas eAP. continet duas ex dictis portionibus, & inſuper trilineum zPi. In dimidio QAPB. totius interſecationis QAPMC. probavimus contineri duas ex dictis portionibus, & cum una ſit zPA., erit reliqua zPBQ., ſed etiam eiP. oſtenſa eſt æqualis uni ex dictis portionibus; duæ igitur quantitates zPBQ. eiP. ſunt inter ſe æquales; à quibus ſi auferatur commune iPBQ., [*Per ax.* 3.] quæ remanent trilinea zPi. BQe. erunt æqualia. Si igitur dimidium BQAP. interſecationis, quam facit circulus circa quadratum RQ., æquale eſt duabus portionibus, quas facit circulus cum lateribus quadrati inſcripti, erit tota interſecatio

QAPMC. quadrupla unius portionis quadrati inſcripti, ſeu æqualis quatuor illis portionibus, quas facit circulus cum lateribus quadrati inſcripti, ut probatum eſt ſupra.

Nemo ſit, qui inſurgat contra me, dicatque, quod hæc ſecunda demonſtratio pendet á prima; ideòque ſi prima eſt certa, ſupervacanea redditur hæc ſecunda; Si verò illa non eſt certa, incerta quoque erit hæc ultima. Nam ultrò admitto objectionem, & dico, quod non alio fine hanc ultimam demonſtrationem in medium protuli, niſi, ut ex ipſis interſecationibus circulorum agnoſcatur quaſi ad oculum, quod interſecatio circuli APMC. circa quadratum RQ., æqualis ſit illis quatuor portionibus, quas facit circulus cum lateribus quadrati inſcripti. Hoc enim pendet in hac ultima demonſtratione à duobus trilineis zPi. BQe., an ſint, vel non, inter ſe æqualia? nam ſi ponantur æqualia redditur evidens, interſecationem QAPMD. æqualem eſſe illis quatuor portionibus quadrati inſcripti, ut patet conſideranti; Si verò aſſeratur eſſe inter illa aliqualem differentiam, & idcircò æqualia non eſſe. Cum hæc differentia, ſeu inæqualitas probari

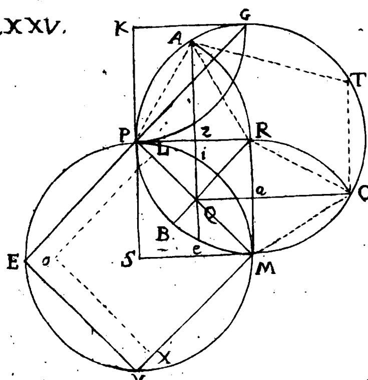
bari non poſſit [ſtante proportione, quam habent centra circulorum ad eorum interſecationes, quas faciunt circa quadrata minora], neque debet admitti; Imò auffertur omninò à proportione prædicta, ideòq; dicta duo trilinea z P i. B Q e. debent neceſſariò eſſe inter ſe æqualia, quod volebamus.

Ex huc uſque probatis ſequitur, quod ſi Q A P M C. æqualis eſt quatuor portionibus, quas facit circulus cum lateribus quadrati inſcripti, quæ remanet quantitas Q A G T C. ſit æqualis ipſi quadrato inſcripto; à qua intervallo P M. abſcindatur arcus A G T., & jungantur A T. T C. Denique in circulo P E V M. inſcribatur quadratum P V.

Quia duæ chordæ P M. A T. æquales ſunt per conſtructionem lateribus quadrati inſcripti P V., ſicuti duo latera P E. E V. quadrati inſcripti P V., ſubtendunt medietatem peripheriæ circuli, ita ſubtendunt eamdem circuli medietatem duo latera P M. A T., reliqui igitur arcus A P. M C. C T. æquales ſunt alteri ejuſdem peripheriæ medietati. Triangula R C M. R A P. ſunt æquilatera, nam duo latera R M. R C., ut ſemidiametri ejuſdem circuli M C T.,

 [*Per*

Figura Vigesimaquinta.



[*Per def.* 15.] ſunt inter ſe æqualia, & ob eamdem rationem æqualia ſunt pariter latera MR. MC., ut ſemidiametri circuli CRS.; ſed latus MR., eſt ſemidiameter utriuſque circuli, eſt igitur [*Ex* 1. *l.* 1.] triangulum RCM. æquilaterum. Eodem argumento probatur Triangulum RAP. eſſe æquilaterum, & æquale triangulo RCM.; ſunt igitur latera MC. PA. hexagoni regularis circulo inſcripti; ſed tres dictorum laterum ſubtendunt totius peripheriæ medietatem, & tres arcus AP. MC. CT. ſunt æquales dictæ peripheriæ medietati, ergo dum arcus CT. complet medietatem circumferentiæ, etiam latus CT. erit hexa-

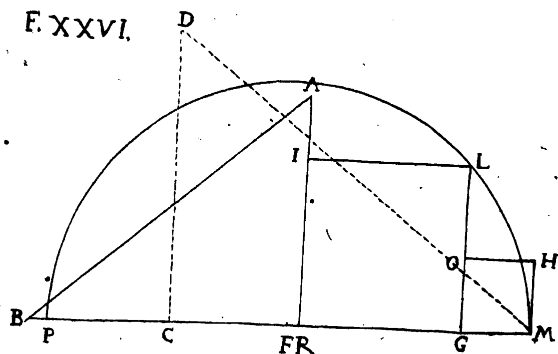
xagoni regularis; ideòque portio C T. eſt una ex illis, quas facit circulus cum lateribus hexagoni regularis circulo inſcripti, & portio A G T. eſt una ex illis quatuor, quas circulus facit cum lateribus quadrati inſcripti.

Alio modo; quia duæ rectæ P M. P G. ſunt latera quadrati circulo inſcripti, ſubtendunt arcum ſemicirculi. Reliquus igitur arcus G T C M. erit pariter ſemicirculi. Duæ rectæ P G. A T. ſunt per constructionem æquales, & per conſequens [*Per* 28. *l.* 3.) ſubtendunt æquales arcus, ſi igitur à dictis arcubus P A G. A G T. auferatur communis arcus AH. [*Ex ax.*3.]; arcus, qui remanent PA. G T. ſunt inter ſe æquales, ſed arcus P A. oſtenſus eſt hexagoni regularis, ergo & arcus G T. erit pariter hexagoni; Arcus M C. oſtenſus eſt etiam hexagoni regularis, ergo, & reliquus, arcus CT. erit ejuſdem hexagoni regularis.

Sed faciliùs inſtituitur argumentum hoc modo. Redigatur nunc tota quantitas rectilinea Q C T A. ad quadratum X L., quod abſcindatur à quadrato inſcripto PV., & reliqua quantitas XOLPEV. redigatur ad quadratum G H. *Fig.* 26., deindè protrahatur latus M G. indefinitè verſus P., & ſuman-

mantur ſex partes ipſi MG. æquales, incipiendo à puncto G. uſque ad punctum P., ita ut GP. ſit ſextupla ipſius GM. Poſt modum diviſa tota MP. biſariam in F., intervallo FM., vel FP. ducatur arcus MLP., producaturque latus GO. ad circumferentiam uſque in L., dico quadratum GLIR. deſcriptum ex GL. ſextuplum eſſe quadrati MO.

Figura Vigeſimaſexta.



Quoniam GL. [*Ex* 13. *l.* 6.] eſt media proportionalis inter PG. GM., erit, ut PG. prima, ad GM. tertiam; Ita GI. [*Ex coroll.* 20. *l.* 6.] quadratum ſecundæ ad GH. quadratum tertiæ. Eſt autem PG. per conſtructionem ipſius GM. ſextupla, er-

ergo & quadratum G I. quadrati G H. ſextuplum erit, quod eſt propoſitum.

Producatur latus R I., & capto intervallo diagonalis G I. abſcindatur æqualis R A., (*Per pr.* 47. *l.* 1.) erit quadratum deſcriptum latere R A. duplum quadrati G I., & duodecuplum quadrati G H., & quia quadratum G H. æquale eſt uni portioni quadrati inſcripti, & ſimul uni hexagoni regularis eidem circulo inſcripti, erit quadratum lateris R A. æquale duodecim portionibus utriuſque.

Capiatur nunc latus R B. cujus quadratum ſit triplum quadrati P V. circulo inſcripti, & jungatur B A., deindè capiatur BA.; & abſcindatur æqualis M C., atque à puncto C. excitetur perpendicularis C D. cujus quadratum æquale ſit duobus hexagonis circulo inſcriptis, & jungatur D M., dico quadratum deſcriptum latere D M. æquale eſſe quinque integris circulis dato circulo æqualibus.

Quia quadratum deſcriptum latere RA. oſtenſum eſt, eſſe æquale duodecim portionibus tàm quadrati circulo inſcripti, quàm duodecim portionibus hexagoni regularis eidem circulo inſcripti, & quadratum deſcriptum latere R B. æquale eſt ex conſtr.

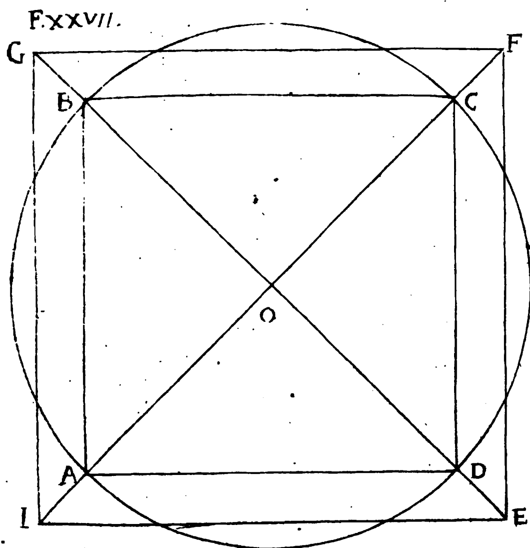
tri-

tribus quadratis circulo inſcriptis. Sed quadratum deſcriptum latere A B. (*Ex* 47. *l.* 1.] æquale eſt quadratis utriuſque lateris: ergo quadratum lateris A B., vel lateris M C. (ſunt enim inter ſe æqualia) æquale eſt tribus integris circulis, & ſimul duodecim portionibus hexagoni regularis; ideòque ſi tribus quadratis inſcriptis addantur duodecim eorum portiones, fiunt tres integri circuli, ut patet. Quadratum lateris C D. eſt æquale ex conſtr. duobus hexagonis regularibus circulo inſcriptis, & quadratum lateris D M. (*Ex* 47. *lib.* 1.) æquale eſt quadratis tàm lateris C D., quàm lateris CM., ſed quadratum lateris CM. oſtenſum eſt æquale tribus integris circulis, & duodecim portionibus hexagoni regularis eidem circulo inſcripti; Si igitur quadrato lateris C M. addatur quadratum lateris C D. æquale duobus hexagonis regularibus, erit quadratum lateris D M. quinque integris circulis æquale; nam duodecim portiones hexagoni regularis additæ duobus hexagonis regularibus eidem circulo inſcriptis, efficiunt duos integros circulos, quod eſt propoſitum.

Capiatur nunc intervallum lateris D M., & deſcribatur dicto intervallo quadratum

I F.

Figura Vigesimaseptima.



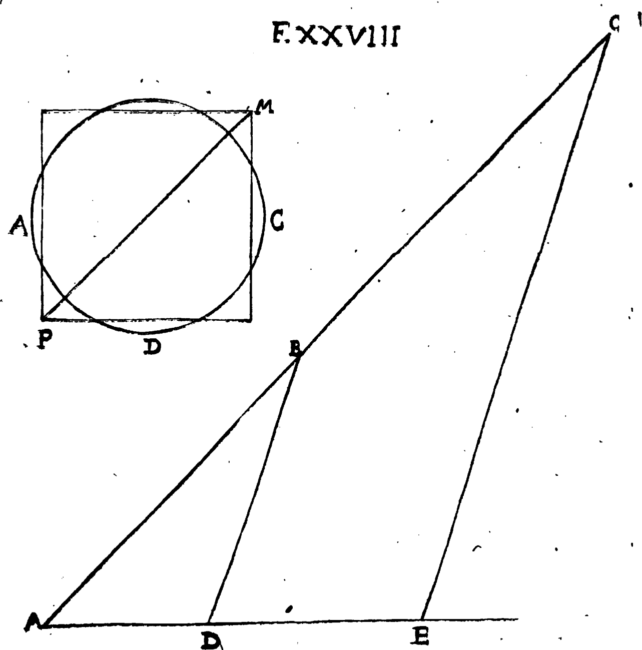
I F. & ducantur diametri I F. E G. Denique capiatur intervallum unius quadrati [*Per pr.* 1. *l.* 13.], quod quintuplum ſit quadrati P V. circulo inſcripti, ut eſt intervallum ſemidiametri O A., vel O C., & centro O. dicto intervallo ducatur Circulus ABCD.; & jungantur A B. B C. C D. D A., dico circulum A B C D., & quadratum I F. eſſe inter ſe æqualia.

Quia quadratum A C. eſt per conſtru-

ctio-

ctionem quintuplum quadrati PV. minoris circuli, erit quoque (*Ex p.* 2. *l.* 12.] circulus ABCD. quintuplus circuli PEVM.; Sed quadratum IF. ostensum est etiam quintuplum circuli PEVM. ergo circulus ABCD., & quadratum IF. sunt inter se æqualia, & per consequens quadratus est circulus quintuplus dati circuli PEVM.

Figura Vigesimaoctava.



Qua-

Quadratur autem datus circulus PEVM. hoc modo. Ducantur duæ rectæ AC. AE. indefinitè, quæ faciant angulum A., & capto intervallo lateris DC. quadrati BD., centro A. abſcindatur æqualis AB., & iterùm capto intervallo lateris EF. majoris quadrati IF., centro B. abſcindatur æqualis BC.; deindè capiatur intervallum VM. lateris quadrati inſcripti in dato circulo PEVM., & centro A. abſcindatur æqualis AD., & jungatur BD. Denique à puncto C. ducatur CE. paralella BD.

Quoniam, ut eſt (*Per pr. 2. l. 6.*) AB. ad BC., ita eſt AD. ad DE., erit permutando, ut AB. ad AD., ita BC. ad DE., quadratum rectæ AB. quintuplum eſt quadrati rectæ AD., ergo, & quadratum rectæ BC. quintuplum etiam erit quadrati rectæ DE., ſed quadratum rectæ BC. æquale eſt Circulo ABCD., qui eſt quintuplus dati circuli PEVM., ergo quadratum rectæ DE., ideſt quadratum PM., erit ipſo dato circulo ABCD. æquale, quod eſt propoſitun.

Si vis Mechanicè reperire latus quadrati æqualis circulo dato; ab angulo V. quadrati inſcripti in vigeſima quinta figura ad punctum a. interſecationis, quam facit re-

recta QC. cum latere MR. quadrati RS., cape intervallum Va.; & habebis latus quadrati æqualis circulo dato.



DE



DE NOBILIORE, AC FACILIORE VIA *QUADRANDI* CIRCULUM

THEOREMA.

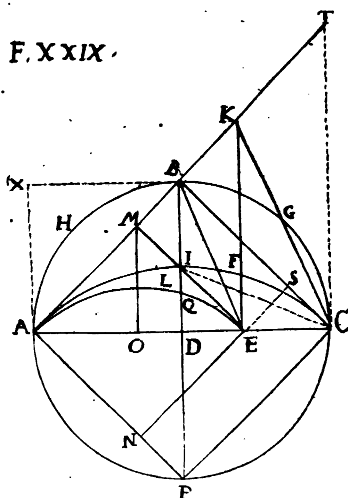
IN Triangulo rectangulo Isoscele, quod sit dimidium quadrati descripti in aliquo circulo, habeatque sectam basim intervallo unius lateris, & rectam lineam ductam ab angu-

lo verticali ad basis sectionem: Triangulum rectilineum à dicta recta linea constitutum, erit uni ex quatuor ejusdem circuli portionibus æquale.

PROBLEMA.

DATO CIRCULO ÆQUALE QUADRATUM CONSTITUERE.

Figura Vigesimanona.



SIt datus circulus ABCP., cui constituendum sit quadratum æquale. Ducantur diametri AC. BP., quæ sese intersecent ad angulos rectos, & jungantur BC. CP. PA. AB., & protrahatur AB. indefinitè ultra B., deindè capiatur intervallum AB., & abscindatur

tur æqualis AE. & à vertice B ad punctum sectionis E. ducatur B E. dico triangulum rectilineum B E C. æquale esse uni ex portionibus, quas facit circulus ABCP. cum lateribus sui quadrati inscripti AC. A'puncto E. ducantur EK. paralella B D., E N. paralella C P., E M. paralella BC., & MO. paralella B D.. Denique capto intervallo PA., vel P C. centro P. ducatur arcus A I C., & similiter capto intervallo N A., vel N E., centro N. ducatur arcus A L E., & jungatur C K.

Quia triangula B D C. C D P. P D A. A D P. habent latera inter se æqualia (*Ex def. X V.*), sunt enim semidiametri ejusdem circuli, & angulos à dictis lateribus contentos æquales; ideſt rectos [*Per pr.* 4. *lib.* 1.), habent quoque & bases B C. C P. P A. A B. æquales, sed anguli B. C. P. A. in semicirculo; (*Ex pr.* 31. *l.* 3.) sunt recti; Ergo quadrilineum A C. est quadratum dato circulo inscriptum, cujus anguli (*Ex* 2. *coroll. pr.* 4. *l.* 2.) bifariam dividuntur à diametris A C. B P. In triangulo Isoscele A P C. habente angulum P. rectum [*Per pr.* 47. *lib.* 1.), quadratum basis A C. duplum est quadrati A P., ideſt duplum quadrati inscripti A C., sed circuli

ſunt inter ſe, [*Ex pr.2. l.12.*) ut eorum quadrata, ergo cum circulus A I C. duplus ſit dati circuli ABCP., erit quoque portio AIC. dupia portionis A H B.

Similiter quia duo triangula A N E. ADB. habent angulos D.N. rectos, ideſt angulum D. ex conſtr., & angulum N. [*Per pr.* 28. *l.* 1.), ut externum, & oppoſitum interno angulo P. recto, angulos ad punctum A. ſemirectos, habent quoque, & reliquos ad puncta E. B. ſemirectos; ſed baſes A E. A B. adjacentes æqualibus angulis ſunt per conſtructionem æquales. ergo, (*Per* 26. *lib.* 1.) tota triangula æquantur, & per conſequens etiam portiones A L E. A H B. ſunt inter ſe æquales; ſed portio A I C. oſtenſa eſt dupla portionis A H B.. [*Ex axiom.* 6.) erit igitur etiam dupla portionis A L E.

Antequam demonſtretur Circuli Quadratura, præmittendum eſt diverſo modo capi altitudines pro triangulis rectilineis, ac mixtilineis: Nam altitudines pro mixtilineis non capiuntur á perpendiculari ducta à vertice ipſorum ad baſim, ut fit in rectilineis, ſed á perpendiculari ducta ab extremo baſis ad latus faciens angulum cum dicta baſi, ut ex ſequentibus demonſtrationibus perſpicuum erit. Di

Dico igitur, quod duo triangula mixtilinea AICB. ALEM. ſunt inter ſe, ut ſunt quadrata baſis AB., & perpendicularis BD. ad quadrata baſis AM., & perpendicularis MO. (utraque perpendicularis BD. MO. ducta eſt ab extremo baſis ad latus faciens angulum cum ipſa, [ut de ſe patet); & quoniam quadratum baſis AB. duplum eſt quadrati baſis AM., & pariter quadratum perpendicularis BD. duplum quadrati perpendicularis MO., etiam triangulum mixtilineum AICB., duplum eſt trianguli mixtilinei ALEM., quod ita demonſtro.

Quia recta ME. ducta eſt paralella BC. duo triangula ABC. AME. ſunt ſimilia, ideòque erit [*Ex pr.* 4. *l.* 6.], ut AB. ad BC., ita AM. ad ME., & permutando, ut AB. ad AM., ita BC. ad ME. In triangulo AME. (*Per pr.* 47. *l.* 1.) quadratum baſis AE. duplum eſt quadrati lateris AM., ſed duæ AE. AB. ſunt per conſtr. æquales, ergo (*Per ax.* 6.) & quadratum baſis AB. duplum eſt quadrati AM., & per conſequens etiam quadratum BC. duplum eſt quadrati ME., & totum triangulum ABC. duplum trianguli AME. Portio AIC. oſtenſa eſt dupla portionis ALE. Si igitur à

majore triangulo A B C. auferatur portio. A I C., & à minore triangulo A M E· auferatur portio A L E., quia ablatum A I C. eſt ad ablatum A L E., ut totum triangulum rectilineum A B C. ad totum rectilineum triangulum AME., (*Ex ax.* 20., & per 19. lib. 5.] erit reliquum triangulum mixtilineum A I C B. ad reliquum mixtilineum triangulum A L E M., ut totum rectilineum A B C. ad totum rectilineum A M E., ſed rectilineum A B C. duplum eſt rectilinei trianguli A M E.. ergo triangulum mixtilineum A I C B. duplum eſt trianguli mixtilinei A L E M., quod voluimus.

Eodem modo demonſtrantur duo triangula mixtilinea A I C K. A L E B. eſſe inter ſe, ut ſunt quadrata baſis A K., & perpendicularis K E. ad quadrata baſis A B., & perpendicularis B D., nam recta E K. cum ſit per conſtr. paralella D B., duo triangula A D B. A E K. ſunt ſimilia, & triangulum AEK. eſt Iſoſceles, ut eſt triangulum ADB., ſed A B. A E. ſunt etiam ex conſtr. æqualia. Duo igitur triangula Iſoſcelia AEK. ABC., quia habent latera inter ſe æqualia, & angulos à dictis lateribus contentos æquales, ideſt rectos, (*Ex pr.* 4. *l.* 1.) habent quoque

& ba-

& bases A K. A C. æquales, & tota triangula æquantur. Sed quadratum basis A C. (*Per* 47. *l.* 1.) duplum est quadrati lateris A B., ergo (*Ex axi.* 6.), & quadratum A K. duplum quoque ipsius erit. In triangulis igitur A B E. A K C., quoniam A B. A E. sunt ex constr. æqualia, & pariter ostensa æqualia A K. A C. (*Per* 28. *l.* 1.) erunt duæ rectæ B E. K C. inter se parallelæ, ideòque erit [*Ex* 4. *l.* 6., ut A K. ad KC., ita AB. ad BE., & alternando, ut AK. ad AB., ita KC. ad BE.: quadratum basis AK. duplum est quadrati basis AB., ergo quadratum K C. duplum est quadrati B E., & per consequens totum triangulum AKC. duplum est trianguli A B E., auferatur nunc à majore A K C. portio A I C.; & à minore A B E. portio A L E., quoniam ablatum ad ablatum, est, ut totum ad totum, erit ex eadem propositione 19. lib. 5., & (*Ex ax.*20.) reliquum mixtilineum AICK. ad reliquum mixtilineum A L E B., ut totum ad totum. Rectilineum A K C. duplum est rectilinei A B E., ergo Mixtilineum AICK. duplum quoque est mixtilinei A L E B. Constat igitur; quod in dato schemate triangula mixtilinea sunt inter se, ut sunt quadrata basis, & perpendicularis ductæ ab extremo unius, ad qua-

 dra-

drata basis, & perpendicularis ductæ ab extremo alterius ad latus faciens angulum cum dicta basi, quod est propositum.

Figura Vigesimanona.

F. XXIX.

Nunc ulterius addo, quod pro triangulis mixtilineis non potest capi altitudo, ut in triangulis rectilineis à perpendiculari ducta à vertice ad basim, quoniam proportio rectilineorum est diversa à proportione mixtilineorum, ut infra ostendam, cum egero de dicto Archimedis, quod circulus sit ad suum quadratum circumscriptum, sicuti undecim ad quatuordecim; ibi videbimus,

mus, quod duo triangula rectilinea, quæ ſunt inter ſe in proportione ſuperbipartiente quintas, & proportione ſubſuperbipartiente quintas, ſi à majore rectilineo auferatur duplum, & à minore ſubduplum, ſicuti factum eſt in præſenti demonſtratione; mixtilinea, quæ remanent (licet ſub ejſdem baſibus; & altitudine) ſunt inter ſe in proportione æqualitatis, quæ diverſa eſt à dicta proportione rectilineorum; ideòque non poteſt ſumi altitudo pro mixtilineis à perpendiculari ducta à vertice ad baſim, ut fit in rectilineis.

Dum igitur demonſtratum eſt in noſtro ſchemate, quod triangula mixtilinea ſunt inter ſe, ut ſunt quadrata baſis, & perpendicularis unius, ad quadrata baſis, & perpendicularis alterius, quæ perpendiculares ductæ ſint ab extremo baſis, ad latus faciens angulum cum dicta baſi, ſequitur, quod in mixtilineis A L E B. A L E M. (*Per pr.* 47. *l.* 1.) quia quadratum baſis A B. oſtenſum eſt duplum quadrati baſis A M., & quadratum perpendicularis B D., eſt pariter duplum quadrati perpendicularis MO.; nam, ut eſt A B. ad B D., ita eſt A M. ad MO., & alternando, ut A B. ad A M.; ita B D. ad M O., etiam triangulum mixtilineum

neum A L E B. sit duplum trianguli mixtilinei ALEM., sed triangulum mixtilineum A I C B. ostensum est quoque duplum dicti trianguli mixtilinei A L E M., ergo (*Per ax.6.*]duo triangula mixtilinea AICB.ALEB. sunt inter se æqualia; quæ duo mixtilinea, etiam probantur æqualia ex eo, quod quadrata basis, & altitudinis unius sint æqualia quadratis basis, & altitudinis alterius; Cum utraque habeant eamdem basim AB., & eamdem altitudinem BD.

A' dictis mixtilineis inter se æqualibus AICB. A L E B. auferatur commune AFB. [*Per axiom.* 3.],quæ remanent A F E L. B F C. sunt inter se æqualia, quibus addatur commune FCE., [*Ex ax.* 2.] erunt tota quantitas AFCEL., & trilineum BEC. inter se ęqualia. Portio A I C. ostensa est dupla portionis ALE., ideòque dicta quantitas, & portio ALE. (*Per axiom.* 7.) sunt inter se æquales, & per consequens [*Ex axiom.* 1.] etiam portio A L E., & triangulum rectilineum B E C. sunt inter se æqualia. Portio A L E. est æqualis cuilibet portioni dati circuli, ideòque, & trilineum BEC. cuilibet earum erit æquale, quod demonstrandum erat, ut propositum theorema verificaretur. Si igitur capiatur quadratum, quod

sit,

ſit, quadruplum dicti trilinei BEC., & ſimul cum quadrato inſcripto AC. redigatur per 14. l. 2. ad unum quadratum. Erit tale quadratum dato circulo ABCP. æquale, quod faciendum, ac demonſtrandum erat.

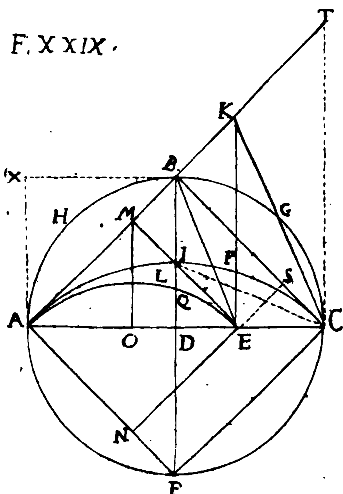
Ex iis, quæ hucuſque probavimus deducuntur non injucundæ demonſtrationes. & primùm, quod rectilineum triangulum BDE. æquale ſit mixtilineo ALEBI.

Quia portio AIC. dividitur biſariam a diametro BP., (*Ex coroll. 2. pr. 10. l. 13.*) tám portio ALE. quàm ſemiportio AID. ſunt inter ſe æquales, utraque enim ſubdupla eſt totius portionis AIC. Si ab ipſis auferatur commune AQD., quæ remanent AQI. QDE. ſunt æqualia; addatur ipſis commune BQE. [*Per ax. 2.*] erunt rectilineum triangulum BDE., & mixtilineum ALEBI. inter ſe æqualia, quod voluimus.

Ex hoc infertur quod ſicuti habetur quadratum dato circulo ABCP. æquale, ſi ad ejus quadratum inſcriptum AC. addatur quantitas, ut dictum eſt, quæ ſit quadrupla trianguli rectilinei BEC., ita quoque quadratur idem circulus ABCP., ſi à quadrato circumſcripto eidem circulo, auferatur quantitas, quæ ſit quadrupla trianguli rectilinei BDE., quod ita demonſtro.

Quo-

Figura Vigesimanona.



Quoniam duo triangula A D B. A M E. ſunt æquiangula, & æqualia, habent enim angulos ad puncta D. M. rectos, angulum D. per conſtr.; & angulum M.; [*Per* 28. l. 1] ut externum, & æqualem angulo B. recto interno, & oppoſito; habent angulum A. communem, ergo (*Ex pro.* 32 *l.* 1.) & reliquos æquales, ſed habent etiam baſes A B. A E. ex conſtr. æquales, & adjacentes æqualibus angulis ergo (*Per pr.* 26. *l.* 1.) tota triangula æquantur. Si ab ipſis auferantur æqualia, hoc eſt a triangulo A D B., ſemiportio

AID.,

A ID., & à triangulo AME. portio ALE., quæ remanent A I B. A L E M. ſunt æqualia. Triangulum mixtilineum ALEB. oſtenſum eſt duplum mixtilinei A L EM. Si igitur à duplo auferatur AIB. æquale ALEM. (*Ex ax.* 7.) reliquum A L E B I. erit æquale eidem A L E M., ſed A L E B I., & rectilineum B D E. demonſtrata ſunt æqualia, ergo B D E., & ALEM. ſunt etiam æqualia inter ſe.

Ducatur nunc B X. paralella D A., & AX. paralella DB., quia quadrantes NALE. D A H B. oſtenſi ſunt æquales, ſunt etiam æqualia inter ſe quadrata A E. AB., & per conſequens mixtilinea A L E M. A H B X. ſunt etiam æqualia inter ſe. Mixtilineo A L E M. oſtenſum eſt æquale triangulum B D E.; erit igitur idem triangulum B D E. etiam æquale mixtilineo AHBX., ſed AHBX. eſt triangulum, per quod quadratum A B. excedit quodrantem D A H B., ergo eſt unum ex quatuor triangulis, per quæ quadratum circumſcriptum excedit circulum. Si igitur à dicto quadrato circumſcripto auferantur dicta quatuor triangula, hoc eſt quantitas quæ quadrupla ſit rectilinei trianguli BDE. oſtenſi æqualis mixtilineo AHBX., & quantitas, quæ remanet redigatur ad unum

qua-

quadratum, illud quadratum erit æquale dato circulo ABCP.; quod erat propositum.

Eodem tempore quadratur etiam circulus AIC. dati circuli ABCP. duplus. Quia cum duo mixtilinea ALEB. AICB. ostensa sint æqualia, & mixtilineum AICK. probatum sit duplum mixtilinei ALEB.; [*Per ax.6.*) erit etiam duplum mixtilinei AICB., & per consequens rectilineum BCK., & mixtilineum AICB. sunt inter se æqualia, sed mixtilineum AICB. est unum ex quatuor trilineis, quibus quadratum circumscriptum circulo AICB. excedit eumdem circulum; ergo si à dicto quadrato circumscripto auferatur quantitas, quæ sit quadrupla trianguli rectilinei BCK., & quantitas, quæ remanet, redigatur ad quadratum, erit illud quadratum æquale circulo AIC., ut patet. Idem circulus AIC. non solùm quadratur subtrahendo á suo quadrato circumscripto, ut dictum est, sed etiam addendo ad ejus quadratum inscriptum. Nam cum triangulum Isosceles ACT. dividatur bifariam à perpendiculari CB., dividitur in duo triangula CBA. CBT. inter se æqualia, à quibus si auferantur æqualia, AICB. BCK. [*Ex ax.. 3.*) quæ remanent portio AIC, & triangulum CKT. sunt inter se æqualia; Ergo si capiatur quanti-

titas, quæ quadrupla ſit trianguli CKT., & addatur quadrato in dicto circulo inſcripto, ita, ut reducantur ambo ad unum quadratum; dictum quadratum erit æquale circulo AIC., quod volebamus.

Secundo deducitur, quod portio ALE. major ſit triangulo mixtilineo ALEM. Protrahatur NE. uſque ad BC., ut ad punctum S.. Quoniam NE. ducta eſt paralella PC. lateri quadrati AC. [*Per pr.*30.*l.*1.] erit etiam paralella oppoſito lateri AB.; Similiter duæ BC. ME. ſunt per conſtr. paralellæ, & quia angulus ABC. eſt rectus, paralellogrammum BE. eſt rectangulum (*Ex* 34. *l.* 1.) diviſum bifariam à diagonali BE., & conſequenter duo triangula BES. BEM. ſunt inter ſe æqualia. Oſtenſum eſt etiam duo triangula AME. ADB. eſſe æqualia, à quibus ablato communi AMID., quæ remanent triangula IMB. IDE. ſunt æqualia, quibus addito communi BIE., erunt triangula BME. BDE. inter ſe æqualia, & idcircò BDE. erit etiam æquale BSE.; Triangulum BEC. majus eſt triangulo BES. toto trilineo ESC., ergo eodem trilineo majus eſt etiam triangulo BDE.. Mixtilineum ALEM., & triangulum BDE. demonſtrata ſunt æqualia.

Tri-

Triangulum BEC. ostensum est majus triangulo BDE. toto trilineo ESC., ergo eodem trilineo est quoque majus mixtilineo ALEM., sed Triangulum BEC., & portio ALE. ostensa sunt inter se æqualia; si igitur Triangulum BEC. majus est mixtilineo ALEM. toto trilineo ESC., etiam portio ALE. eodem trilineo major est, quod voluimus.

Tertio infertur, portionem ICF. esse æqualem triangulo ESC., quod ita ostenditur. Quoniam triangulum IDE. habet angulum D. ex constr. rectum, angulum E. probatum semirectum [*Ex* 32. *l.* 1.), erit reliquus ad punctum I. etiam semirectus, ideòque est triangulum Isosceles habens latera DE. DI. æqualia, sed æqualia sunt quoque latera BD. CD. (*Ex def.* 15.] sunt enim semidiametri ejusdem circuli. Duo igitur triangula BDE. CDI., quia habent latera BD. DE. CD. DI. inter se æqualia, & continent eumdem angulum D. (*Per* 4. *l.* 1.) habent etiam bases BE. CI. æquales, & tota triangula æquantur. Diameter BP., quia dividit diametrum AC. subtendentem arcum AIC. ad angulos rectos, (*Ex* 3. *l.* 3. *&* *pr.* 10. *l.* 13.) dividit bifariam tàm AC., quàm arcum AIC., & propterea dividit

to-

totam portionem AIC. in duas partes DIA. DIC. inter ſe æquales; eſt igitur tota portio AIC. dupla ſemiportionis DIC., ſed etiam oſtenſa eſt dupla portionis ALE., ergo ALE. DIC. ſunt inter ſe æqualia. Triangulum BEC. oſtenſum eſt æquale portioni ALE., Ideòque eſt etiam æquale ſemiportioni DIC. Si igitur triangulum BEC. excedit triangulum BDE. toto triangulo CSE., & ſemiportio DIC. excedit rectilineum CID., oſtenſum æquale BDE., tota portione ICF., erit dicta portio triangulo CSE. æqualis, quod erat propoſitum.

Agamus nunc de lunula Hyppocratis Chij, quæ ex noſtro ſchemate, in quo ducta ſunt latera AB. BC. trianguli ABC., apertè videtur, illam eſſe tantùm verſionem interioris portionis AIC. extra latera AB. BC. trianguli ABC.; Ideòque ſolummodò concludit modo ſophiſtico, quod portio AIC. eſt æqualis duobus portionibus AHB. BGC. ſimul ſumptis, quibus ſi addatur commune triangulum mixtilineum ABCI.; totum triangulum rectilineum ABC., & curvilineum, ideſt lunulam AICGBH. ſunt inter ſe æqualia, licet Autor ad tegendam ſophiſticam probationem oſtenderit quadrantem AICP., & ſemicirculum AHBGC.

esse inter se æquales, à quibus dempto communi AIC., quæ remanent triangulum APC. & dictam lunulam AIC GBH. sunt inter se æqualia, & per consequens dari quantitates curvilineam, & rectilineam inter se æquales: Et quamvis hoc verum sit; nihilominùs ex ejus demonstratione nihil proficuum eruitur.

Nos autem demonstravimus quantitatem AEBH, & rectilineum triangulum ABC. esse inter se æqualia, à quibus dempto communi rectilineò ABE., quæ remanent portio AHB., & rectilineum triangulum BEC. sunt æqualia, ideòque juncta quadrato inscripto quantitate, quæ sit quadrupla trianguli BEC. constituitur quadratum dato circulo ABCP. æquale.

En quanta facilitate quadratur circulus, & tàm purè, tàm simpliciter, ut ductu unius rectæ lineæ ab angulo verticali ad basis sectionem in triangulo rectangulo Isosce-le (prout demonstratum est) habeatur, & rectilineum triangulum BEC. æquale portioni circuli AHB., & triangulum BDE., vel EBM. æquale mixtilineo triangulo ALEM. Et hoc dixisse sit satis, dum Magistris Mathesum (quas Ego aliis distensus curis, vix primoribus labris attingo), & perspicacio-

ribus

ribus ingeniis relinquo, elegantes alias invenire, ac novas demonſtrationes eorum ſapientia dignas .

Si autem vis in promptu habere quadratum æquale cuicumque circulo dato. Fac circulum, & deſcribe in eo quadratum; deindè cape rectam lineam, quæ major ſit uno latere dicti quadrati quarta parte, ideſt quæ ſit ſexquiquarta ejuſdem lateris, & illa dabit tibi latus quadrati dato circulo æqualis .



QUADRATURA CIRCULI
NUNC DEMONSTRATA.
PROBARI ETIAM POTEST *SEQUENTI MODO,*
AD COMPROBANDAM ASSERTIONEM ARCHIMEDIS.

Figura Trigesima.

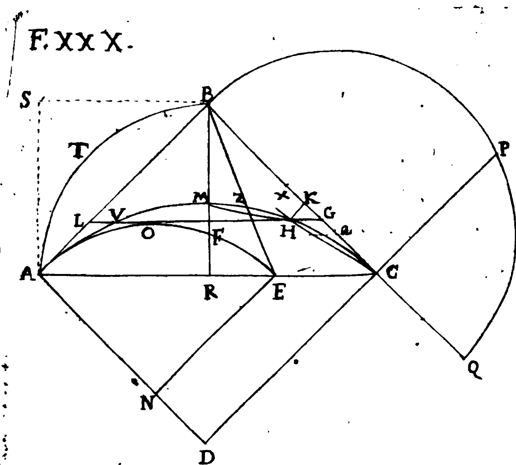
F. XXX.

FIat quadratum AC., jungaturque AC., & protrahantur duo latera indefinitè BC.

BC. DC., & diviso bifariam latere BC. ad punctum X., intervallo BX., vel CX. abscindatur æqualis CQ.; deindè divisa bifariam BQ. ad punctum a., intervallo aB., vel aQ. ducatur arcus BPQ., & capto intervallo CP. abscindatur æqualis BG., & ducatur GL. paralella AC., & ducatur etiam BR. perpendicularis ad AC. Denique capiatur intervallum AB., & abscindatur æqualis AE., & ducatur EN. paralella DC.; jungaturque BE., & capto intervallo DA., vel DC. centro D., ducatur arcus AMC., & similiter intervallo NA., vel NE., centro N. ducatur arcus AOE.

Quia recta CP. (*Per* 13. *l.* 6.) est media proportionalis inter rectas BC. CQ.; habet BC. ad CQ. (*Ex Lemm.* 8. *l.* 6.) duplicatam proportionem illius, quam habet BC. ad CP., sed quadratum BC. ad quadratum CP. (*Per* 20 *l.* 6.) habet eamdem duplicatam proportionem, quam habet latus omologum BC. ad latus omologum CP., habebit (*Per* 11. *lib.* 5) quadratum rectæ CB. ad quadratum rectæ CP. eamdem proportionem, quam habet BC. ad CQ. Per constructionem BC. dupla est CQ., erit igitur quadratum lateris BC. duplum quadrati lateris CP., ideſt duplum quadrati late-

Figura Trigesima.



ris B G. ipsi C P. æqualis, sed quadratum lateris BC. ad quadratum lateris BG. (*Per* 22. *lib.* 6.) est ut triangulum B C A. ad simile triangulum B G L., dum igitur quadratum lateris BC. duplum est quadrati lateris B G., erit etiam triangulum B C A. duplum trianguli B G L., ideòque recta G L. dividit triangulum BCA. in duas æquales partes, & triangulum B G L. æquale est quadrilineo A L G C.

Ducatur nunc à puncto C. per punctum H. intersecationis recta C H. indefinitè, & capto intervallo H F. abscindatur æqualis C H.,

CH., & à puncto H. excitetur perpendicularis HK., & capto intervallo FM. abſcindatur æqualis HK., jungaturque KC.

Quoniam duo triangula HFM. CHK. habent latera HF. CH. ex conſtr. æqualia, pariterque æqualia latera FM. HK., & angulos à dictis lateribus contentos æquales, ideſt rectos per conſtr., habent quoque (*Ex* 4. *lib.* 1.) & baſes HM. CK. æquales, & (*Per* 8. *lib.* 1.) tota triangula æquantur; Sed triangulum CHG., ut pars trianguli CHK. minor eſt ipſo, ideòque etiam minor triangulo HFM., & per conſequens ſemiportio HFM., quæ major eſt trilineo rectilineo HFM.; eſt multò major triangulo mixtilineo CHG. Idem eſt de ſemiportione VMF., & triangulo AVL.. Si igitur ab æqualibus BGL. ALGC. auferantur inæqualia; hoc eſt á triangulo BGL. majus VMH., & á quadrilineo ALGC. auferatur minus, ideſt duo triangula CHG. AVL., erit reliquum CHVA. majus reliquo LVMHGB., & ſi majori CHVA. addatur majus HMV., & minori LVMHGB. addatur minùs, hoc eſt duo triangula CHG. AVL., erit tota portio AMC. multò major triangulo mixtilineo AMCB., & conſequenter dicta portio major eſt medietate trianguli ABC.

Insuper quoniam recta NE. facta est paralella DC., erit angu us ENA. externus (*Per* 28. *l.* 1.) rectus, quia interno, & opposito recto D. æqualis; Angulus A. quadrati (*Ex coroll. p.* 4. *lib.* 2.) dividitur bifariam à diametro AC., ergo in triangulis ANE. ARB., quia duo anguli N. R. sunt recti, duo NAE. BAR. semirecti, (*Per* 32. *l.* 1.) erunt & reliqui AEN. ABR. etiam semirecti; Ideóque dicta duo triangula sunt Isoscelia, & æquiangula; sed bases AE. AB. sunt ex constr. æquales, & adjacent æqualibus angulis, ergo (*Per* 26. *l.* 1.) tota triangula æquantur, & idcircò quadrantes NAOE. RATB. [*Ex pr.* 28. *l.* 3.] sunt inter se æquales, & per consequens æquales etiam sunt inter se portiones AOE. ATB. Quadratum diametri AC. (*Ex pr.* 47. *l.* 1.) æquale est quadratis laterum AB. BC., & duplum quadrati AB., ideòque etiam duplum quadrati AE., sed circuli sunt inter se, [*Per* 2. *lib.* 12.] ut sunt eorum quadrata, ergo circulus AMC. duplus est circuli AOE., vel ATB., & propterea etiam portio AMC. dupla est portionis AOE., vel ATB.

Considerentur nunc duo triangula rectilinea ABC. ABE., quæ cum habeant eam-

eamdem altitudinem BR. [*Ex* 1.*lib*.6.) sunt inter se, ut bases AC. AE., & quoniam ostensum est quadratum basis AC. duplum esse quadrati basis AE., dictæ bases sunt potentia commensurabiles, & earum quadrata sunt ut numerus ad numerum, scilicet, ut septem ad quinque, Ideòque triangulum ABC., est superbipartiens quintas trianguli ABE. Si igitur ex septem, hoc est ex triangulo ABC. auferatur numerus medietate major, qui continet quatuor numeros, hoc est si auferatur portio AMC., quæ ostensa est major medietate trianguli ABC.; numeri, qui remanent erunt tres; & si à quinque numeris, hoc est à minore triangulo ABE. auferantur duo numeri, qui sunt dimidium quatuor numerorum, hoc est auferatur portio AOE., quæ dimidia est portionis AMC., erunt pariter numeri, qui remanent tres; ideòque ablatis à dictis triangulis rectilineis ABC. ABE. duabus portionibus AMC. AOE., quæ remanent mixtilinea triangula AMCB. AOEB. sunt inter se æqualia. A' dictis mixtilineis deme commune AzB. (*Ex ax.* 3.), quæ remanent AOEz. BzC. sunt æqualia, quibus addatur commune EzC., tota quantitas AOECz., & triangulum BEC. erunt

æqua-

æqualia. Portio AOE., quia oſtenſa eſt dimidium portionis A M C., erit æqualis reliquæ quantitati AOÉCz., & idcircò etiam æqualis triangulo B E C. Si igitur capiatur quantitas, quæ quadrupla ſit trianguli BEC., & ſimul cum quadrato inſcripto circulo AOE., vel A T B. redigatur ad unum quadratum, Erit tale quadratum æquale dicto circulo A O E., vel A T B., quod volebamus.

Ex dictis oſtenditur veram eſſe aſſertionem Archimedis; videlicet, quod circulus ſe habeat ad ſuum quadratum circumſcriptum, ut undecim ad quatuordecim, nam ſi ſupra quadrantem R A T B. ducantur AS. B S. paralellæ duobus lateribus R A.R B., quia in quadrato RS., dimidium ejus BSA., conſtat, ut oſtendimus ex ſeptem numeris, quorum tres continet triangulum mixtilineum A T B S., & quatuor, portio A T B. Septem quoque numeros continebit alterum dimidium A R B., cui ſi addantur quatuor numeri, hoc eſt portio A T B., erit totus quadrans RATB. numerorum undecim, cui ſi addatur triangulum mixtilineum A T B S. numerorum trium, erit totum quadratum R S. numerorum quatuordecim: Sed ſicut ſe habet quadrans R A T B. ad quadratum R S., ita ſe habet totus circulus A T B. ad

ſuum

ſuum quadratum circumſcriptum; nam ſi utraque quater multiplicentur, erit totus circulus ad ſuum quadratum circumſcriptum, ut 44. ad 56. Et rurſus ſi dicti numeri redigantur ad minimos numeros, erunt pariter ut 11. ad 14. Eſt igitur Circulus ad ſuum quadratum circumſcriptum, ut dixit Archimedes, ut undecim ad quatuordecim, quod erat propoſitum.

Hæc demonſtratio non eſt omninò certa, nam licet ſit verum, quod portio AMC. major ſit triangulo mixtilineo AMCB., & major quoque dimidio trianguli ABC., nihilominùs, quantus ſit ejus exceſſus ignoratur, nec demonſtrari poteſt: quæ incertitudo oritur ab altitudine Trilineorum capta ex perpendiculari, cadente ab eorum vertice ad baſim, ut fit in triangulis rectilineis, nam talis regula non poteſt deſervire pro triangulis mixtilineis, quia in altitudine ſic accepta, triangula rectilinea, & mixtilinea mutant proportionem, ut apparet ex præſenti demonſtratione, in qua pro rectilineis triangulis eſt proportio ſuperbipartiens, & ſubſuperbipartiens quintas, & pro triangulis mixtilineis eſt proportio æqualitatis; quod non evenit in noſtra regula ſupra data, in qua retinetur eadem proportio pro utriſque trilineis, ideòque geo-

me-

metricè demonstratur assumptum; sed capiendo altitudinem pro utrisque trilineis, ut docuit pro solis rectilineis Euclides; nihil certi statui potest, & propterea dixit Archimedes, quod ejus assertio non erat certa, sed valdè veritati propinqua.



DE PRÆSTANTISSIMA
REGULA,
AC METHODO
ADINVENIENDI GEOMETRICE'
DUAS MEDIAS PROPORTIONALES
Infra quascumque duas datas rectas Lineas.



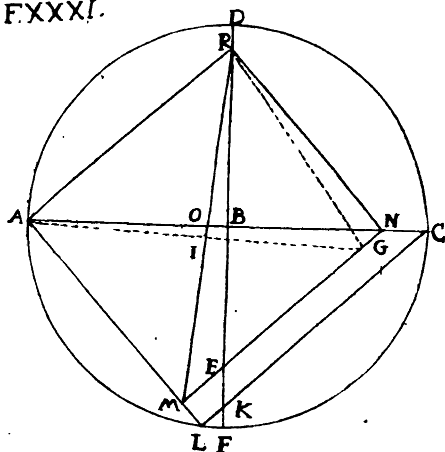
QUI FACIT VERITATEM
VENIT AD LUCEM,
Ut manifestentur Opera Ejus;
QUIA IN DEO SUNT FACTA.
Joan; cap. 3. 25.



Ultimo loco agendum est de via, ac methodo inveniendi infra duas datas lineas, duas medias proportionales, quibus perficitur Problema Deliacum, hoc est duplicatio cubi, & quæcumque corpora in data proportione augentur, vel minuuntur; quemadmodum id ipsum in figuris planis efficitur per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hyppocrates, quam, ut singularem, & unicam omnis Geometrarum posteritas amplexa est; & cui Platonis hortatu omnes Greciæ Geometræ summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comm. in Archim. varij recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menecchmi, Erathostenis, Philonis Bizzantii, Heronis, Apollonei Pergei, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi, quibus alios deindè addiderunt Vernerus, P. Gregorius à S. Vincentio, nec non (ut de Joanne Moltero Hasso taceam) Cristophorus Gruembergius, Renatus Cartesius, aliique, sed nec ab antiquis, nec ab ullo alio usque ad præsens tempus Problema hoc celeberrimum geometricè solutum est. Periculum ejusdem rei fecit etiam Pater Clavius S. I. in fine propositionis undecimæ lib. 6. elementorum Euclidis, sed geometricam methodum adinveniendi duas dictas medias proportionales, reperire non potuit, ut apparet ex sequentibus ejus verbis. Sine magno labore inter duas rectas da-

datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem geometricè, omninò, sed quasi attentando, & praxim iterum, atque iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. *Huc usque Clavius.*

Figura Trigesimaprima.



Et quamvis Orontius Finæus se jactet, quod repererit modum adinveniendi duas medias proportionales, infra illas duas tantùm datas, quarum minor sit æqualis dimidio majoris, vel illius medietatem excedat; nihilominùs ejus demonstratio nihil concludit, cum sit falsa, ac sophistica, prout manifestum fit ex ipsius demonstratione, quam hìc appono, non per extensum, sed

sed ejus partem, qua credit probare intentum.

In subjecto schemate sunt per ipsum duæ rectæ datæ AB. BE. Compositæ ad angulum rectum: deinde intervallo majoris AB., centro B. ducit circulum ADCL., completq; diametros, & divisa EF. secundum extremam, & mediam rationem ad punctum K., à puncto C. per dictum punctum K. ducit rectam CL., & jungit LA. Denique à puncto E. ducit MN. paralellam CL., & similiter à puncto A. ducit AR. paralellam MN., & jungit RN. RM., atque ita efformat argumenta.

Quoniam duæ AR. MN. sunt paralellæ; anguli alterni ARM. RMN. sunt inter se æquales, ex 29. l. primi, & ob eamdem rationem duo anguli alterni ANM. NAR. sunt æquales: Anguli preterea circa O. verticem sub AOR. MON. per 15. primi sunt æquales. Equiangula sunt itaque AOR., & MON. Triangula, & quæ circum igitur æquales angulos sunt latera, invicem proportionalia (per 4. lib. 6.) Sicut igitur AO. ad OR; Sic NO. ad OM.; Similis ergo rationis sunt AO. ad ON., atque ipsa RO. ad OM. latera.

Præterea cum sit, ut AO. ad OR., sic NO. ad OM., & qui sub AOM. NOR. continentur anguli sunt per 15. l. primi invicem æquales. Triangula igitur AOM. NOR. habent unum an-

angulum uni angulo æqualem, & quæ circum æquales angulos latera reciprocè proportionalia. Æquum est igitur triangulum AOM. *ipsi triangulo* NOR., *per* 15. *sexti, & quoniam bases* AM., & NR. *in æqualibus trianguli æquales subtendunt angulos, similis igitur coguntur esse rationis. Atqui* AO., & ON., *nec non* RO., & OM. *similis quoque sunt rationis. Est enim, ut* AO., *ad* OR., *sic* NO. *ad* OM., *proportionalia itaque sunt eorumdem triangulorum* AOM., & NOR. *latera, & proindè ipsa triangula sunt invicem æquiangula, & æquales habent angulos. sub quibus ejusdem rationis latera subtenduntur per* 5. *sexti. Nam sicut in triangulis æquiangulis similis rationis sunt, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur, per* 4. *sexti, sic in triangulis, quorum latera sunt proportionalia, similis rationis latera æquales versa vice subtendunt angulos. Angulus itaque* AMO. *ipsi* ORN., *atque reliquus* MAO. *reliquo* ONR. *est æqualis. In rectis ergo lineis* AM., & NR. *rectæ incidentes lineæ* AN., & MR., *efficiunt alternos angulos invicem æquales; paralella est igitur* NR. *ipsi* AM. *Paralellogrammum est itaquè ipsum* AMNR. *quadrilaterum, & rectangulum, quia cum duo anguli ad puncta* A. M. *sint recti, qui ex opposito constituunt anguli* N. R. *sunt recti, per* 34. *primi.*

Hæc

Hæc est tota demonstratio Orontii.

Sed si vera essent, & non sophistica ejus argumenta, ductis duabus rectis AG. RG. probaretur rationibus ab Orontio adductis, etiam rectas AM.RG.esse inter se paralellas; nam duo triangula AIR.GIM.sunt etiam æquiangula, & quæ circa æquales angulos sunt latera invicem proportionalia, per 4. l. 6., sicut igitur AI. ad IR., sic GI. ad IM. similis ergo rationis sunt AI. ad IG.; atque ipsa RI. ad IM. latera. Et ita prosequendo singulis argumentis, quibus usus est Orontius, probatur, duas rectas AM. RG. esse etiam inter se paralellas; sed per Orontium eidem AM. paralella est recta RN., ergo per 30. l. 1.; etiam duæ rectæ RN. RG. facientes angulum GRN. sunt inter se paralellæ; quo nihil absurdius concipi potest. Falsa est igitur ejus demonstratio, ac sophistica sunt omnia argumenta ab Ipso adducta, & nisi fallor, ejus æquivocatio sita est in hoc, quod latera tantùm proportionalia fecit reciproca, ut expendenti accuratè patet. Dabimus ergo absolutissimam methodum pro inventione duarum mediarum proportionalium infra duas datas quascumque rectas, prout ex sequentibus problematibus apparebit.



PROPBL. I. PROPOS. I.

DAtis duabus rectis lineis, quarum minor, ſit vel æqualis dimidio majoris, vel illius medietatem excedat; Invenire duas medias infra illas proportionales.

SInt duæ datæ rectæ lineæ A.B.,quarum minor B. excedat medietatem majoris A. vel æqualis ſit dimidio ejuſdem. Capiatur intervallum majoris A.,& facto ad libitum centro ad aliquod punctum I., ducatur circulus AMKZ., & ducantur diametri AK. MZ., quæ ſe interſecent ad angulos rectos. Poſtea

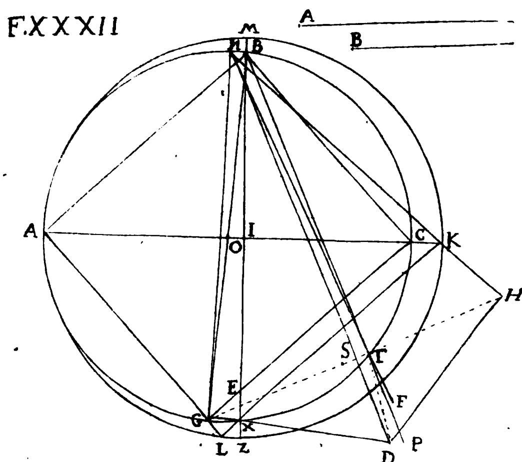
ca-

capto intervallo minoris B. abſcindatur æqualis IE., & reliqua pars EZ. (*Ex pro.* 11. *l.* 2.) dividatur ſecundum extremam, & mediam rationem ad aliquod punctum X., ita ut ſit, ſicuti ZE. ad EX., ita EX. ad XZ., atque à puncto K. per punctum X. ducatur KL. uſque ad peripheriam circuli, & jungatur LA., deindè à puncto E. ducatur CG. paralella KL., & diviſa bifariam recta CA. ad aliquod punctum O., intervallo OA., vel OC. ducatur circulus ABCG., & jungantur AB. BC. BG.

Quia angulus KLA. (*Ex pr.* 31. *l.* 3.) in ſemicirculo eſt rectus, & CG. ducta eſt paralella KL. [*Per pr.* 28. *l.* 1.) angulus CGA., ut externus, & æqualis angulo interno, & oppoſito L., eſt etiam rectus, ideòque in ſemicirculo AGC. Angulus ABC., eſt etiam in ſemicirculo ABC.; & idcircò rectus, & quoniam recta BG. tranſit per centrum O., anguli quoque BCG. BAG. in ſemicirculo ſunt recti, & per conſequens quadrilaterum AC. eſt paralellagrammum rectangulum.

Si recta BC. non tranſit per centrum O., erit centrum, vel à parte ſiniſtra OA., vel à dextera OC.; & primùm. Sit centrum, ſi eſt poſſibile, à parte ſiniſtra OA., & tranſeat per dictum centrum recta GN., à puncto G. ducatur recta ad libitum, quæ ſecet circulum ad

Figura Trigesimasecunda.



aliquod punctum T., & protrahatur indefinitè, ut linea recta GH., deindè capto intervallo rectæ NG., centro N. secetur GH. ad aliquod punctum H., & jungatur NH., postea intervallo ad libitum, facto centro in punctis G.H.ducantur duo arcus sese invicem intersecantes ad aliquod punctum D., & jungantur DH. DG.; Denique à puncto N. per punctum T. intersecationis ducatur NF., & similiter à puncto B. per dictum punctum T. ducatur DP., & jungantur DT. DN.

Quoniam duo triangula NGD. NHD. habent latera NG. NH. ex constructione æqualia,

lia, & pariter æqualia latera DG. DH. (sunt enim semidiametri æqualium circulorum,) & latus DN. commune, æquantur inter se; & anguli ad punctum N. oppositi æqualibus lateribus (*Per pr.*8.*l.*1.] sunt æquales. In triangulis igitur GNS. HNS. quia latera HN. GN. sunt æqualia, latus NS. commune, & anguli à dictis lateribus contenti æquales (*Ex pr.* 4. *l.* 1.), erunt quoque, & bases GS. SH. inter se æquales, & quia basis GH. est divisa bifariam [*Per pr.* 3. *l.* 3.), est etiam divisa ad angulos rectos; Sed angulus rectus GSN., ut externus triangulo STN. (*Ex pr.* 32. *l.*1.] est æqualis duobus internis, & oppositis STN. TNS., ergo angulus T. est recto minor, idest acutus, & per consequens (*Per pr.* 31. *l.* 3.) cum sit in majore segmento, basis GN. trianguli GTN. subtendens dictum angulum T. non potest transire per centrum, sed cadit extra centrum. Non igitur centrum circuli est in parte sinistra OA.

Dico insuper, quod centrum O. nec minùs potest esse in dextera parte OC., & quia tàm constructio, quàm demonstratio est omninò eadem cum ea, quæ nunc facta est; non est ampliùs in hoc immorandum, dum unusquisque potest à semetipso id experiri. Dum igitur centrum non potest esse neque à sinistra parte

OA., neque à dextera OC., erit necessariò ii puncto O., per quod transit recta GB.

Si quis animo contradicendi asserere vellet, quod recta DN. transit per punctum T., & per consequens, quod angulus GTN. sit in semicirculo, & rectus; & propterea recta GN subtendens dictum angulum transit per centrum. Hoc dici non potest. Primò quia cum tres lineæ DT. PT. FT. sese intersecent ad punctum T., si recta DT., quæ extremo D. cadit ad sinistram partem rectæ PT., cum qua facit angulum, protrahatur, cadere debet extremo opposito ad partem dexteram dictæ PT., & non ad sinistram ad punctum N., ideoque DN. non potest transire per punctum T.. Secundo loco, si recta DN. transiret per punctum T., quia per dictum punctum transit etiam ex constr. recta NF., duæ rectæ DT. FT. haberent commune segmentum TN., quod est absurdum (*Per ax.* 10.). Non igitur DN. transire potest per punctum T., & consequenter cum angulus ad dictum punctum sit acutus, quemadmodum est jam demonstratum, recta GN. illum subtendens non transit per centrum, sed cadit extra illud, quod voluimus.

Probato igitur, quod recta BG. transit per centrum O., anguli BCG. BAG. [*Per pr.* 31. *l.* 3.) in semicirculo sunt recti, & quia

etiam

etiam ostensi sunt recti anguli AGC. ABC., quadrilineum AC. est paralellogrammum rectangulum, ideòque est, (*Per pr.* 4. *l.* 6.) ut AI. ad IB.; ita IB. ad IC., & ut IB. ad IC., ita IC. ad IE., sunt igitur quatuor rectæ AI. IB. IC. IE. continuè proportionales, quarum duæ AI. IE. sunt illæ datæ, ergo reliquæ IB. IC. sunt duæ mediæ inventæ infra illas proportionales. Datis igitur &c. quod faciendum erat.

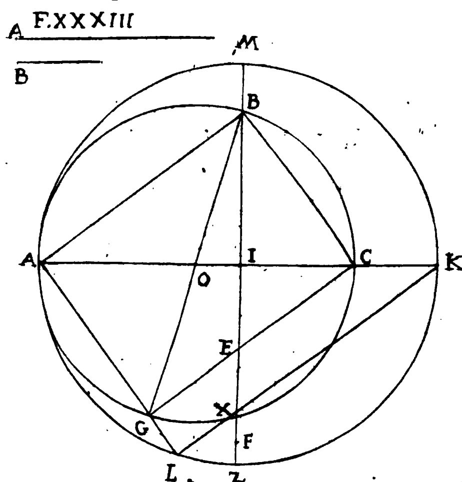


PCO-

PROBL. II. PROPOS. II.

DAtis duabus rectis lineis, quarum minor ſit quarta pars majoris, vel major quarta parte, ſed minor dimidia; reperire infra illas duas medias proportionales.

Figura Trigeſimatertia.



SInt duæ datæ rectæ A. B., & minor B. ſit quarta pars majoris, vel excedat quartam

tam partem, ſed non pertingat ad dimidiam. Capiatur intervallum majoris A., & facto centro ad aliquod punctum I. ducatur circulus AMKZ., & fiant omnia, ut factum eſt ſupra; ſed diviſa ſemidiametro IZ. in octo partes æquales, & abjecta una octava parte, ut FZ. capiatur intervallum minoris B., & abſciſſa æquali IE., reliqua EF. dividatur ſecundum extremam, & mediam rationem ad aliquod punctum X.: deindè fac omnia, ſicuti factum eſt in conſtructione primi problematis, prout inſpicitur in ſubjecto ſchemate.

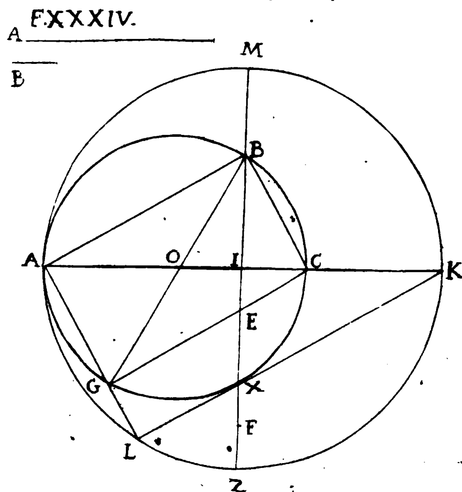
Demonſtratio hujus problematis eſt omninò eadem, cum illa, quæ jam facta eſt in prima propoſitione, ideòque ſupervacaneum eſt illam repetere. Sicuti etiam ſuperfluum eſſet demonſtrare, rectam BG. tranſire per centrum O. minoris circuli; nam conſtructis triangulis GND. HND., ut factum eſt in antecedenti figura, demonſtraretur quoque, quod centrum O. non poteſt eſſe, neque in ſiniſtra parte OA., neque in dextera OC., ſed neceſſariò eſt in puncto O., per quod tranſit recta BG.. Repete argumenta ſuperiùs facta, & habebis intentum.

PRO-

PROBL. III. PROPOS. III.

DAtis duabus rectis lineis, quarum minor ſit octava pars majoris, vel major octava parte, ſed minor quarta parte illius; reperire duas medias inter illas proportionales.

Figura Trigeſimaquarta.



OMnia facienda ſunt, ut factum eſt in antecedentibus conſtructionibus, excepto ſo-

ſolùm, quod ſemidiameter IZ. dividenda eſt in ſexdecim partes æquales, & tribus earum partibus abjectis, ut FZ., capiatur intervallum minoris B., & abſciſſa æquali IE, reliqua E F. dividatur ſecundum extremam, & mediam rationem ad aliquod punctum X., deindè proſequatur in omnibus, ut ſupra factum eſt.

Demonſtratio eſt eadem cum ſuperioribus.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

DAtis duabus rectis lineis, quarum minor ſit decima ſexta pars majoris, vel major decima ſexta, minor vero octava parte; Invenire inter illas duas medias proportionales.

In hac hypotheſi ſola differentia ſtat in hoc, quod diviſa diametro IZ. pariter in ſexdecim æquales partes, abiciendæ ſunt quinque earum. Reliqua facienda ſunt, ut in antecedentibus factum eſt, quia tám conſtructio, quàm demonſtratio eſt eadem.

PRO-

PROBL. V. PROPOS. V.

HOc problema eſt circa duas rectas, quarum minor ſit brevior decima ſexta parte majoris, & in tali caſu, ut inter ipſas reperiantur duæ mediæ proportionales, dividenda eſt ſemidiameter in ſexdecim partes æquales, & abjiciendæ ſunt ſeptem earum. Conſtructio, & demonſtratio eſt eadem cum ſuperioribus.



ALIA



ALIA ELEGANTIOR,

AC FACILIOR

REGULA

INVENIENDI INFRA DUAS

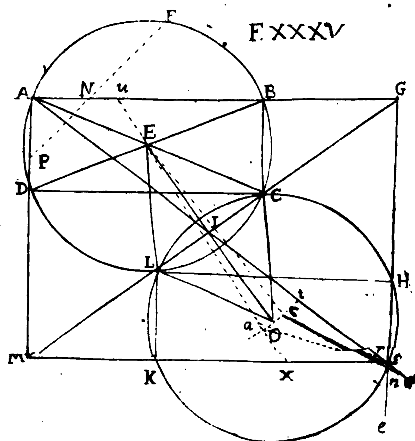
QUASCUMQUE DATAS RECTAS LINEAS

DUAS MEDIAS PROPORTIONALES.

SInt duæ rectæ lineæ datæ DC. CB. inter quas inveniendæ ſint duæ aliæ rectæ lineæ proportionales. Componantur datæ rectæ, ad angulum rectum, DCB. & perficiatur paralellogrammum rectangulum BD. protrahendo latera AB. AD. indefinitè, & ductis diametris AC. DB. centro E., intervallo ſemidiametri ducatur circulus ABCD., deindè quia latus B C. eſt minus dimidio lateris

A B.,

Figura Trigesimaquinta.



AB., dividatur A B. in quatuor partes æquales, & retenta una earum, ideſt A N., dividatur etiam latus A D. in tres partes æquales per 10. l. 6., & abjecta una earum, ut DP., à puncto P. per punctum N. ducatur P F., & capto intervallo FB., centro B. abſcindantur æqualis BG. à protracto latere AB., atque à puncto G. per punctum C. anguli paralellogrammi, ducatur recta GM.. Poſtea compleatur paralellogrammum AS., & ducatur diameter A S., quæ protrahatur indefinitè, atque intervallo ſemidiametri E C. facto centro in punctis C. L. interſecationum, quas

facit

facit recta GM. cum peripheria circuli, ducantur duo arcus, qui ſeſe interſecent ad aliquod punctum O., & jungantur CO. LO.. Denique ducatur recta EO., quam dico tranſire per punctum I. interſecationis, quam faciunt duæ diametri inter ſe.

Si recta EO. non tranſit per punctum I., tranſibit per dictum punctum aliqua alia recta linea ducta à dicto puncto E. propè rectam EO., vel ab una, vel ab altera parte, Capiatur igitur intervallum IE., & centro I. ducatur arcus ta., & iterum capto intervallo ſemidiametri EC., centro t. abſcindatur á producta diametro AS. æqualis tm., & eodem retento intervallo, facto centro in punctis r. n. captis ad libitum propè punctum S., ducantur arcus, qui ſecent arcum ta., ad aliqua puncta a. c., & jungantur ra. Sc. nc. Ec. Ea, ſed Ea protrahatur ex utraque parte uſque ad aliqua puncta u. x. laterum AC. MS.

Quia recta Im. ex conſtructione æqualis eſt duobus lateribus IE. EA. trianguli IEA. & tàm In. quàm recta Ir. minor eſt recta Im., ſequitur qnod etiam In. Ir. minoresſint dictis lateribus IE. EA., ſed lateribus IE. EA. factæ ſunt æquales tám Ia. ra., quàm Ic. cn., ergo rectæ Ir. In. ſunt etiam minores dictis

rectis I a. r a., & I c. c n., quæ cum ſint majores, & ductæ ab extremis minorum I r. I n. [*Per pr.* 20. *l.* 1.], neceſſariò ſecare ſe debent ad aliqua puncta a. c., ut patet. Hoc poſito. Si recta E O. non tranſit per punctum I., tranſeat primo loco per dictum punctum, ſi eſt poſſibile, recta Ea. ducta propè rectam E O.

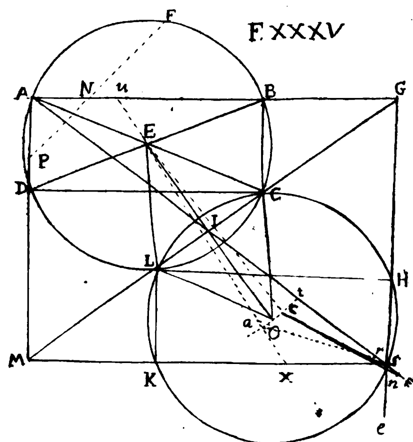
Quoniam duo triangula M A G. M S G. (*Ex pr.* 34. *l.* 1.) ſunt æqualia (ſunt enim dimidia ejuſdem paralellogrammi), & recta u x. tranſit ex hypotheſi per punctum I. interſecationis, quam faciunt diametri inter ſe; Sequitur, quod ſicuti diametri, quæ tranſeunt per centrum paralellogrammi, illud bifariam dividunt, ſic recta u x., quia & ipſa tranſit per dictum centrum I. [*Ex add. ad pr.* 34. *l.* 1.) dividit quoque bifariam totum paralellogrammum in duo trapetia MxuA. GuxS., & propterea in quo puncto areæ trianguli M A G. reperitur centrum E., in eodem puncto areæ trianguli MSG. reperitur etiam punctum a.; & conſequenter per quod ſpatium centrum E. diſtat ab angulo A., & à lateribus, & baſi trianguli MAG., per idem ſpatium diſtat quoq; punctum a. ab angulo S., & à lateribus, & baſi trianguli MSG., & pariter utraque E. a. diſtant à diametro AS. æquali ſpatio.

Conſiderentur nunc duo triangula I E A.

I a r.

I a r., quæ cum habeant tàm latera IE. I a., quàm latera E A. a r. ex constr. æqualia, & angulos à dictis lateribus contentos æquè distantes ab eorum basibus, hoc est æquales (*Per pr.*4. *l.*1.] habent quoque, & bases I A. I r. inter se æquales. Si anguli à lateribus æqualibus contenti, & æquè distantes à basibus non essent æquales; sequeretur, quod major, & minor angulus ab æqualibus lateribus comprehensi, æquè distarent à basibus; & consequenter, quod eamdem haberent altitudinem, & essent inter easdem, vel æquè distantes inter se paralellas, quod est absurdum; dum major angulus necessariò est sua basi propinquior, quam minor sua; quando uterq; angulus continetur ab æqualibus lateribus, ut est manifestum. Dum igitur dicta duo triangula habent latera, & bases I A. I r. inter se æqualia; quia diametri MG.AS. paralellogrammi sese dividunt bifariam ad punctum I., & in duas partes æquales, sequitur, quod IA. IS. sint inter se æqualia, sed basi IA. ostensa est æqualis etiam basis Ir., ergo Ir. erit quoque æqualis I S., pars, & totum, quod est absurdum. Dum igitur angulus I a r. magis distat à sua basi I r., & per consequens ab angulo S., quàm distat angulus IEA. à sua basi IA., & angulo A., non potest recta Ea., in qua sunt dicta puncta E. a.

Figura Trigesimaquinta.



transire per punctum I. centrum paralello-grammi A S.

Idem est de quacumque alia rectalinea ab eodem centro E. ducta propè rectam E O.. Transeat secundo loco, si est possibile, per dictum punctum I. recta E c. ducta ab eodem puncto E. ex altera parte propè rectam E O., & ostendo id esse impossibile sequenti demonstratione; protrahatur aliquantulum latus GS. usque ad punctum e.

Quia angulus MSG. paralellogrammi est rectus (*Ex pr.*13. *l.*1.] erit angulus deinceps MSe. pariter rectus, cui addito angulo MSc., to-

totus angulus cSe. erit obtusus; angulo c S e. addatur angulus e S n., erit totus angulus n S c. multò magis obtusus; ideòque in triangulo c S n. [*Ex* 19. *l.* 1.] subtenditur à majori latere c n., dum igitur latus c n. majus est latere c S., punctum c. minus distat ab extremo S., quàm ab extremo n., sed quantum distat extremum n. à puncto c., tantum distat etiam extremum A. semidiametri EA. à centro E. [sunt enim EA. c n.. ex constr. æqualia], ergo cum extremum S. diametri SA. paralellogrammi minus distet à puncto c., qnàm distet extremum oppositum A. ejusdem diametri à centro E., sequitur ex jam demonstratis, quod recta E c. non potest transire per punctum I. centrum paralellogrammi AS., quia si transiret per dictum centrum, duo extrema E. c. æquè distarent ab oppositis angulis A. S. Dum igitur neque recta Ea., neque recta Ec. transire potest per punctum I., necessariò per dictum punctum transit recta EO., quod est propositum.

Reperiamus nunc duas medias proportionales infra duas datas DC. CB., quia duo triangula ECO. ELO. habent latera ex constr. æqualia, & latus EO. commune [*Ex* 8. *l.* 1.] inter se æquantur, & anguli ad punctum E. oppositi æqualibus lateribus OC. OL. sunt

æquales; In triangulis igitur IEC. IEL.; quoniam latera CE. EL. ſunt æqualia, latus EI. commune, & anguli à dictis lateribus contenti æquales [*Per pr.4.l.1.*] etiam baſes IC. IL. ſunt æquales; Sed IG. IM.; ut dimidia diametri GM. oſtenſa ſunt æqualia; ſi ab ipſis demantur æqualia IC. IL. (*Ex ax.* 3.); quæ remanent CG. LM. ſunt æqualia, & ſi illis addatur commune LC. (*Ex ax.* 2.) erunt LG. CM. inter ſe æqualia, & per conſequens duo rectangula LG. GC., & CM. ML.(*Per* 36.*l.*3.) ſunt æqualia,ſed rectangulum AG. GB. æquale eſt rectangulo LG. GC., & rectangulum AM. MD. æquale rectangulo CM. ML., ergo duo rectangula (*Ex ax.*1.) AG. GB., & AM. MD. ſunt inter ſe æqualia,& propterea erit,ut GA. ad AM., ita reciprocè (*Per.pr.* 14. *l.* 6.) DM. ad GB., ſed ut GA. eſt ad AM.(*Ex pr.*4.*l.* 6.) ita eſt CD. ad DM., ergo ut CD. ad DM., ita eſt DM.ad GB.Rurſum quia jam oſtenſum eſt DM. eſſe ad GB., ut CD. eſt ad DM., eſt verò CD. ad DM.;ut GA.ad AM., hoc eſt,ut GB. ad BC., erit quoque DM. ad GB., ut GB. eſt ad BC. Omnes igitur quatuor rectæ lineæ CD. DM. GB. BC. ſunt continuè proportionales, ac proindè inter datas DC. CB. inventæ ſunt duæ mediæ, quod erat faciendum.

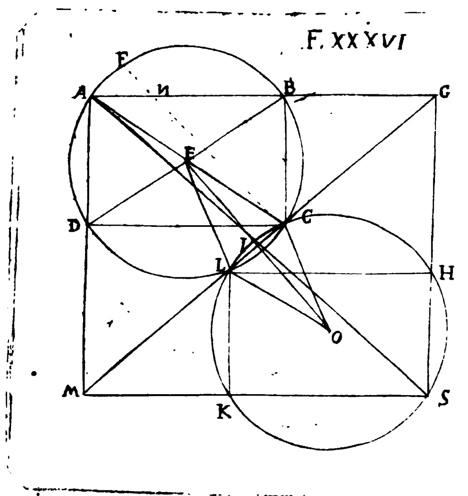
Si vis habere dictas rectas lineas magis in-

inter ſe unitas; à puncto L. ducatur LH. paralella MS., & LK. paralella HS., erit quadrilineum KH. paralellogrammum, & quia angulus S. eſt rectus, erit paralellogrammum rectangulum, & à centro O. intervallo OL., vel OC. ducatur circulus LCHS.

Quia duo triangula GBC. MKL. habent angulos ad puncta B. K. rectos, angulos alternos MGB. GMK. (*Per* 29. *l.* 1.) æquales, & latera CG. LM. æqualia (*Ex* 26. *l.* 1.), tota triangula æquantur, & latera GB. MK. oppoſita æqualibus angulis (*Per* 8. *l.* 1.] ſunt æqualia, & pariter æqualia inter ſe latera BC. KL. Demptis igitur GB. MK. ab æqualibus lateribus GA, MS. [*Ex ax.* 3.), quæ remanent BA. KS. ſunt æqualia, ſed latera BC. KL. oſtenſa ſunt etiam æqualia, ergo duo rectangula DB. KH. ſunt inter ſe æqualia; Et idcircò quemadmodum circulus AFBC. tranſit per quatuor angulos rectanguli DB., ita æqualis circulus LCHS. tranſire debet per quatuor angulos rectanguli KH., oſtenſa ſunt æqualia inter ſe BC., hoc eſt AD., & KL., ideſt HS.. Si igitur ab æqualibus lateribus AM. SG. auferantur æqualia AD. HS., quæ remanent DM. HG. ſunt æqualia. Diximus eſſe CD. ad DM., ut DM. ad GB., hoc eſt, ut DM. ad MK., nam duæ GB. MK. oſtenſæ ſunt æquales, & pariter eſſe, ut

DM. ad GB., ita GB. ad BC., ideſt ut DM. ad MK., ita MK. ad KL., quoniam BC. KL. oſtenſæ ſunt æquales. Eſt igitur, ut CD. ad DM.; ita DM. ad MK., & ut DM. eſt ad MK., ita MK. eſt ad KL., ſic quoque ut LH. eſt ad HG., ita HG. eſt ad GB., &, ut HG. eſt ad GB., ita GB. eſt ad BC., hoc ordine meliùs diſcernuntur quatuor rectæ continuè proportionales; ſunt ergo duæ mediæ inventæ tàm DM. MK., quàm HG. GB.

Figura Trigeſimaſexta.



Animadvertendum, quod diverſa regula tenenda eſt in datis lineis. Nam quando minor ex datis eſt minor medietate majoris, tunc te-

tenenda est praxis jám assignata; videlicet major linea dividenda est in quatuor partes æquales, & in tres partes æquales minor. Sed quando minor ex datis, aut est æqualis, aut excedit medietatem majoris, tunc capiatur, ut in præsenti schemate intervallum BC. minoris lineæ, & centro B. abscindatur æqualis BN., atque à puncto anguli C. per punctum N. ducatur recta CF., & iterum capto intervallo DF., centro D. abscindatur æqualis DM., & à puncto M. per punctum anguli C. ducatur MG., & fiant reliqua, ut jam factum est in antecedente constructione; nam demonstrationes sunt omninò eædem cum superioribus. Et hoc satis sit pro absolutione trium problematum tàm difficilium, quorum assequuta veritas soli Deo tribuenda est bonorum omnium largitori, qui facit de tenebris lumen splendescere, & Cui tota sit laus, honor, & gloria in seculorum secula.



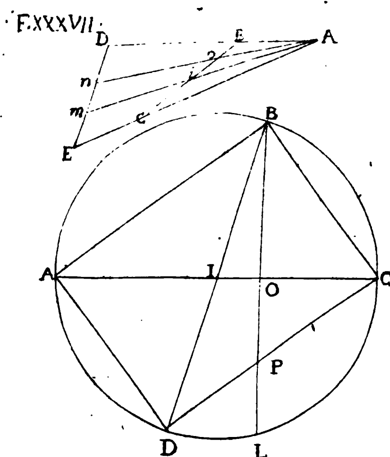
DE MIRABILI
NATURA
AC PROPRIETATE
ANGULI ACUTI
NON EXCEDENTIS TERTIAM PARTEM
ANGULI RECTI.
PRO INVENTIONE
DUARUM, TRIUM, VEL PLURIUM MEDIARUM
INTER DUAS
QUASCUMQUE DATAS
LINEAS RECTAS.



PRO coronide ponam hic numquam satis laudabilem regulam inveniendi inter duas quascumque datas rectas lineas, non duas tantùm, sed tres, quatuor, & quot unusquisque voluerit medias proportionales. Invenerunt varios modos ingeniosos, ac faciles Plato, Philo Bizantius pro duabus mediis, & Cartesius etiam pro tribus, & pluribus, sed non geometricos, quia invenerunt dictas medias auxilio mechanicorum instrumentorum. Regula autem, quam Ego dabo pro inventione mediarum; utrum sit, vel non totalitér geometrica, relinquo judicio prudentum, sed qualiscumque illa sit, certè elegantior meo judicio inveniri vix poterit.

Si vis igitur invenire duas tantùm medias proportionales inter duas lineas quascumque datas: Capiantur quatuor lineæ continuè proportionales, quarum maxima, & minima componantur ad angulum non excedentem tertiam partem anguli recti, sed sit vel illi æqualis, vel minor; ideſt ex quatuor lineis continuè proportionalibus AE. Am. An. AD. maxima AE., & minima AD. componant angulum EAD., qui non excedat tertiam partem anguli recti; hoc facto jungatur ED., & capto intervallo Am. secundæ proportionalis, centro A. secetur ED. ad aliquod punctum m., & du-

Figura Trigesimaseptima.



& ducatur Am., atq; iterum capto intervallo An. tertiæ proportionalis, centro eodem A. ſecetur ED. ad aliquod punctum n., & ducatur An., & ſi plures eſſent proportionales, eodem modo aptari deberent intra angulum EAD.. Denique ſecentur ad libitum dictæ quatuor proportionales aliqua recta linea, ut BC. Dico, quod omnes quatuor rectæ lineæ contentæ in angulo CAB., ſunt continuè proportionales, & ſi duæ à principio datæ lineæ eſſent AC. AB., duæ A i. A o. eſſent mediæ inter ipſas inventæ: In ſectionibus tamen ſemper ſervanda eſt proportio maximæ, & mini-

mæ,

mæ, tàm in acceptis proportionalibus, quàm in rectis lineis datis. Hoc est, si AE. in acceptis proportionalibus est maxima, etiam maxima ex datis secari debet ex ipsa, & ita minima ex minima. Hoc posito ita demonstro, quod omnes quatuor rectæ lineæ AC. Ai. Ao. AB. sint continuè proportionales.

Quia duæ rectæ lineæ Am. An. aptatæ in angulo EAD. sumunt proportionem à prima proportionali AE., & ultima AD., ita, ut quantò magis secunda Am. recedit à prima AE., & accedit ad ultimam AD., tantò fit proportionaliter minor A E., & similiter tertia An., quia magis recedit ab eadem prima AE., quàm recedat secunda Am., & magis accedit ad ultimam AD., magis quoque fit proportionaliter minor, & prima AE., & secunda Am., & sic de reliquis; Sequitur quod eædem rectæ lineæ proportionales constituentes eosdem angulos in triangulo CAB. sectæ à recta CB., sumant etiam proportionem inter se à prima AC., & ultima AB., quia pariter quantò magis secunda Ai. recedit à prima AC., & accedit ad ultimam AB., tantò proportionaliter fit minor AC., & sic de reliquis. Si igitur duæ rectæ lineæ aptatæ in angulo EAD. sunt continuè proportionales sectæ à recta ED., & ratione anguli EAD., & quia sem-

Figura Trigesimaseptima.

F.XXXVII.

ſemper proportionaliter minorantur, prout magis, & minùs recedunt à prima, & accedunt ad ultimam. Ob eamdem omninò rationem eædem rectæ lineæ ſectæ à recta CB., erunt etiam continuè proportionales, quod eſt propoſitum.

Nulla ratio diſparitatis aſſignari poteſt inter proportiones utrarumque ſectarum, dum ſunt eædem rectæ lineæ aptatæ eidem angulo CAB. non majori tertia parte anguli recti, & conſtituentes eoſdem angulos; ideòque ſive ſint ſectæ ab una, vel ab altera recta linea, ſemper retinent inter ſe eamdem continuam pro-

proportionem; quod non evenit si rectæ proportionales aptentur angulo majori tertia parte anguli recti, ut docet experientia; Nam illa minoritas anguli tribuit iisdem proportionalibus quamdam, ut ita dicam, immutabilem continuam proportionem; nec ut supra dictum fuit, potest assignari alia ratio, quæ nobis nota sit, præter quamdam proprietatem, & affectionem, quam dictus angulus habet.

Ostendam autem dictam anguli proprietatem sequenti demonstratione. Ducantur duæ rectæ lineæ AC. BL. sese intersecantes ad angulos rectos ad aliquod punctum O., & capto intervallo rectæ AC. in angulo CAB., centro O. abscindatur æqualis OA., & iterum capto intervallo secundæ Ai., centro O. abscindatur æqualis OB., & intervallo tertiæ A o. abscindatur æqualis OC., atque intervallo ultimæ AB. abscindatur æqualis OP.; deindè à puncto C. per punctum P. ducatur CD. indefinitè, & divisa bifariam AC. ad aliquod punctum I., intervallo IA., vel IC. ducatur circulus ABCD., & à puncto A. ad punctum B. circumferentiæ ducatur recta AB., & jungantur BC. DA. DB., dico quadrilineum AC., esse paralellogrammum rectangulum.

Quia in quadrilineo AC. (*Per pr.* 31 *.l.*3.) duo anguli B. D. in semicirculo sunt recti, sequi-

quitur (*Ex* 22. *l.* 3.) quod alii duo A. C. ſint duobus rectis æquales ; ſed recta BD. tranſit per centrum I., uti jam probatum eſt ſupra in prima regula inveniendi duas medias proportionales ; ergo cum etiam anguli A. C. ſint in ſemicirculo, & ipſi ſunt recti; Et idcircò quadrilaterum AC. (*Per pr.* 34. *l.* 1.) eſt parallellogrammum rectangulum, & propterea erit [*Ex p.* 4. *l.* 6.], ut AO. ad OB., ita OB. ad OC., & ut OB. ad OC., ita OC. ad OP. ſunt igitur quatuor rectæ OA.OB.OC.OP. excerptæ ab angulo C A B., continuè proportionales, quod voluimus. Nec dici poteſt, quod incertum ſit, utrum circulus tranſeat per extremum B. proportionalis OB., quia cum tres rectæ lineæ OA. OC. OP. excerptæ ab angulo CAB. ſint proportionales, nulla ratio aſſignari poteſt, quare OB. pariter capta ab eodem angulo non ſit cæteris proportionalis ; Nam ſicuti dici non poteſt, quod in angulo E A D. ſint proportionales AE. An. AD., & non ſit etiam proportionalis Am., ita quoque dici non poteſt, quod ſint proportionales in angulo CAB. tres rectæ AC. Ao. AB., & non ſit proportionalis etiam recta Ai.. Dum igitur omnes quatuor ſunt continuè proportionales, circulus ABCD. tranſire debet per extremum B. proportionalis OB., quod erat oſtendendum.

Vi-